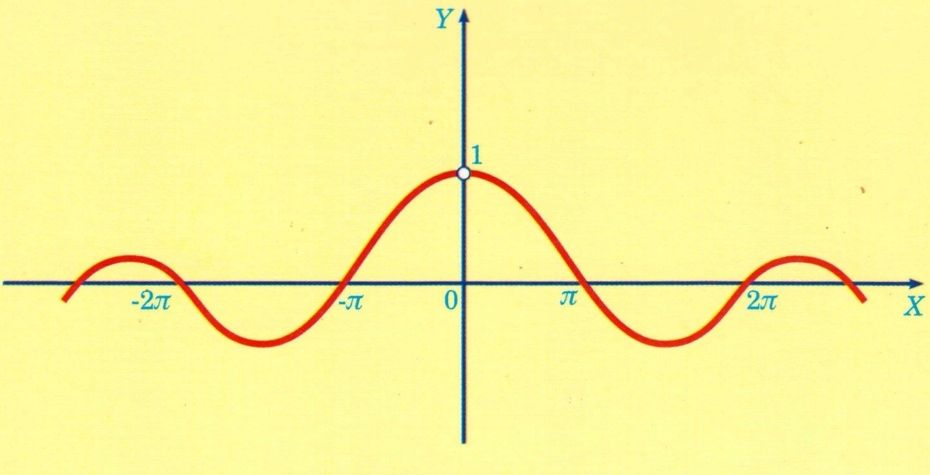
ANÁLISIS MATEMÁTICO I

LÍMITES Y CONTINUIDAD

PUNTOS DE ACUMULACIÓN
SUCESIONES
LÍMITE
CONTINUIDAD



$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

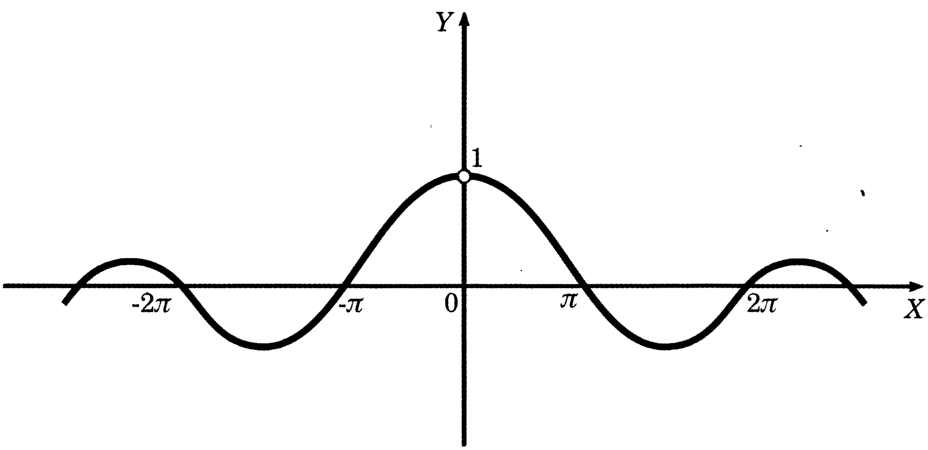
MOISÉS LÁZARO C.

MOSHERA EDITORIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

LÍMITES Y CONTINUIDAD

PUNTOS DE ACUMULACIÓN
SUCESIONES
LÍMITE
CONTINUIDAD



$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

MOISÉS LÁZARO C.

MOSHERA EDITORIAL

ANALISIS MATEMATICO I

LIMITES Y CONTINUIDAD

PUNTOS DE ACUMULACIÓN

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

LÍMITES DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

FUNCIONES CONTINUAS

Moisés Lázaro C.

EDITORIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Autor: Moisés Lázaro C.

Decreto Legislativo .... : 822
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° : 2009-04609
ISBN .... : 978-9972-813-55-9

Edición - Impresión - Distribución
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú
Telefax : 567-9299

IMPRESO EN EL PERÚ - PRINTED IN PERÚ

A:
Teresa Roxana
mi adorada hija.

PREFACIO

*Este libro es el primer tomo de **ANÁLISIS I**, el segundo tomo es referente a la derivada de una función real de variable real y sus aplicaciones.*

En este libro revisado, agregado y mejorado comprende 4 capítulos:

1. *Puntos de Acumulación*
2. *Sucesiones de Números Reales*
3. *Límites de una Funciones Reales de Variable Real*
4. *Funciones Continuas*

Al reeditar el presente libro no podía dejar de hacer el primer capítulo, porque el concepto de punto de acumulación justifica el estudio de límite de una sucesión y de límite de una función.

En cada capítulo se hace una detallada y cuidadosa exposición de la teoría y de los teoremas más importantes que son el esqueleto y fundamento de todo tema de análisis matemático, siempre acompañado de ejemplos aclaratorios de innumerables ejercicios propuestos..

El presente libro es una combinación de cálculo y análisis. Para un curso de cálculo bastará tomar de este libro sólo las definiciones más elementales y luego los problemas prácticos en los cuales se hacen cálculos y gráficos que serán suficientes para tener nociones básicas del cálculo. Cuando se requiere fundamentar algunas nociones matemáticas será, entonces preciso consultar los teoremas que son las únicas proposiciones válidas para justificar cualquier duda.

Para un curso propiamente de Análisis, se requiere el estudio de las definiciones y de los teoremas, tratándolos con sumo cuidado, sin alterar las definiciones y menos tergiversar el enunciado de los teoremas y cuidando su rigurosidad.

En el curso de cálculo se puede omitir los capítulos I y II, siendo suficiente el estudio de los capítulos III y IV que son prerequisito para continuar con el estudio de las derivadas.

En cada capítulo se proponen diversos problemas para que el estudiante revise con el asesoramiento de su profesor, si se presenta alguna duda.

Una recomendación al lector : un libro de matemáticas no se puede leer como un diario o una novela, el alumno tiene que tomar lápiz y papel para volver a escribir la definición sin alterarla, puede tomar los mismos ejemplos y resolverlos por su cuenta, verificándolos después; es una manera muy simple de estudiar matemáticas. Algunas veces hay que recurrir a las gráficas y a la imaginación, fuentes del desarrollo intelectual.

Al final del libro, he planteado una miscelánea de problemas que servirán para reforzar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para terminar, debo agradecer profundamente a mis colegas que con su sabia crítica han permitido el mejoramiento de la presente publicación. En especial debo agradecer al Dr. Cesar Carranza, por su apoyo moral y su profunda labor académica que me han inspirado para seguir estudiando y mejorando mis modestas publicaciones.

MOISÉS LÁZARO C.

CONTENIDO

1 PUNTOS DE ACUMULACIÓN

2 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

3 LÍMITES DE FUNCIONES

4 FUNCIONES CONTINUAS

CAPÍTULO 1

PUNTOS DE ACUMULACIÓN

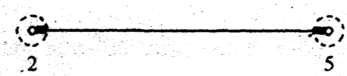
1.1 INTRODUCCIÓN

Antes de entrar a definir el concepto de límite de una función real de variable real o de límite de una sucesión, es necesario estudiar el concepto de punto de acumulación.

Sea A un conjunto no vacío de los números reales y x_0 un número real (x_0 no necesariamente pertenece al conjunto A) si alrededor de x_0 se "*amontonan*" (se acumulan) infinidad de elementos de A nos dará la idea de que x_0 es punto de acumulación de A.

Por ejemplo:

a) En el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 5\}$



Se tiene: $2 \notin A$, pero 2 es punto de acumulación de A.
$5 \notin A$, pero 5 es punto de acumulación de A.

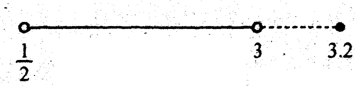
y todos los puntos del conjunto A son puntos de acumulación.

¿Por qué 2 es punto de acumulación de A?

Porque alrededor de 2 existen infinidad de puntos que pertenecen al conjunto A. De igual manera podemos razonar con respecto a 5.

El número 5 es punto de acumulación de A, porque alrededor de 5 existen infinidad de puntos de A.

b) En el conjunto $B = \left\langle \frac{1}{2}, 3 \right\rangle \cup \{3.2\}$



Se tiene: $\frac{1}{2} \notin B$, pero es punto de acumulación de B.
$3 \notin B$, pero es punto de acumulación de B.
$3.2 \in B$, pero no es punto de acumulación.

¿Por qué 3.2 no es punto de acumulación de B?
Porque alrededor de 3.2 no es posible encontrar puntos de B que estén amontonados alrededor de 3.2

NOTA ACLARATORIA:

Cuando decimos puntos ***amontonados*** alrededor de 3.2 nos referimos a los puntos $x \in B$ que están muy cerca a 3.2, tan cerca que la diferencia $|x-3.2|$ es casi cero. De ahí la necesidad de usar un número real positivo tan pequeño que la llamaremos ε (épsilon) tal que $|x-3.2| < \varepsilon$.

La desigualdad $|x-3.2| < \varepsilon$ implica que $(x-3.2)$ tiende a acercarse a cero, es decir x tiende en acercarse a 3.2.

c) En el conjunto $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \longrightarrow 0\right)$

Se observa que cuando n es un número natural muy grande, entonces el número real $\frac{1}{n}$ se hace cada vez tan pequeño que se acerca a cero es decir:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ se acerca a "0"}}_{\left(\frac{1}{n}\right)\to 0} \quad \text{cuando} \quad \underbrace{n \text{ es muy grande}}_{n\to +\infty}$$

En este caso "0" es punto de acumulación del conjunto de números reales $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ porque alrededor de "0" es posible encontrar infinidad de puntos pertenecientes al conjunto $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

EJERCICIOS Sección 1.1

En los siguientes conjuntos diga cuales son los puntos de acumulación y cuales no son .

BLOQUE I

$A = \{x \in I\!R / -1 < x < 3\}$ **R.** -1, 3, int.

$B = \{x \in I\!R / -2 \leq x \leq 3\}$ **R.** Todos

$C = \langle -2,3\rangle \cup \{3\}$ **R.** -2, 3, int.

$D = \langle -2,3\rangle \cup \{4\}$ **R.** 4 no es, -2, 3, int.

$E = \{0,1\} \cup \{1.001\}$ **R.** ninguno

$F = \{-0.01\} \cup \langle 0,1\rangle \cup \{1.0001\}$ **R.** ninguno

Nota: int = punto interior.

BLOQUE II

$A = (2,3,4,\ldots)$ **R.** No tiene.

$N = (0,1,2,3,\ldots)$ **R.** No tiene.

$Z = (\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots)$ **R.** No tiene

$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ **R.** 0

$C = (2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots)$ **R.** 2

$D = (\sqrt{2.1}, \sqrt{2.01}, \sqrt{2.002}, \ldots)$ **R.** $\sqrt{2}$

BLOQUE III

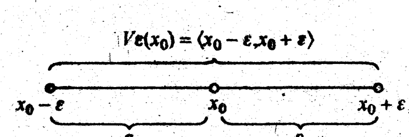
En cada uno de los siguientes conjuntos numéricos, llamados sucesiones, halle los puntos de acumulación, si existen. En caso contrario diga que no tiene puntos de acumulación.

1. $(n)_{n\geq 0}$ **R.** No tiene.
2. $\left(\frac{1}{n-2}\right)_{n\geq 3}$ **R.** 0
3. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ **R.** 1
4. $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\geq 0}$ **R.** 0
5. $\left(2-\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ **R.** 2
6. $\left(\frac{2n-1}{3n-1}\right)_{n\geq 0}$ **R.** $\frac{2}{3}$
7. $\left(\frac{2n^2-n+1}{n^2+3}\right)_{n\geq 0}$ **R.** 2
8. $\left(\frac{5n}{2n-1}\right)_{n\geq 0}$ **R.** $\frac{5}{2}$
9. $\left(\frac{1-3n}{n}\right)_{n\geq 1}$ **R.** -3
10. $\left(\frac{3-7n}{n+3}\right)_{n\geq 0}$ **R.** $-\frac{7}{2}$
11. $A=\left\{x\in \mathbb{R} / x=(-1)^n\frac{2n-1}{n+1}, n\in \mathbb{N}\right\}$ **R.** $2, -2$
12. $B=\left\{x\in \mathbb{R} / x=(-1)^n\frac{3-n}{1+2n}, n\in \mathbb{N}\right\}$ **R.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
13. $(S_n)_{n\geq 1}$, donde $S_n=1+2+3+\ldots+n$ **R.** No tiene
14. $(S_n)_{n\geq 1}$, donde $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ **R.** 2
15. $(S_n)_{n\geq 1}$, donde $S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^n}$, $|a|<1$ **R.** $\frac{1}{a-1}$

☐ 1.2 VECINDAD DE UN NÚMERO REAL

Definición: Dado un número real x_0, una vecindad de x_0 es un intervalo abierto que tiene como centro a x_0 y como radio un número real positivo ε.

Ver la siguiente ilustración:



Notación: $V_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \varepsilon \}$

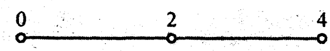
$= \{ x \in \mathbb{R} / x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle \}$

Vecindad de x_0 de radio $\varepsilon > 0$

Nota:
En general cualquier intervalo abierto que contiene al punto x_0 es vecindad de x_0.

Ejemplo 1.

Dado el punto $x_0 = 2$



Una vecindad de 2 es: $V_\varepsilon(2) = \{ x \in \mathbb{R} / |x - 2| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \}$

También son vecindades de 2 los intervalos abiertos: $\langle 1.5, 2.5 \rangle, \langle 1.9, 2.1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \ldots$ etc.

El intervalo: $\left\langle 2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right\rangle$; $\forall n \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ también es vecindad de 2.

Nota:
En el análisis matemático se trabaja con vecindades de la forma $V_\varepsilon(x_0) = \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle, \forall \varepsilon > 0$ donde ε es un número real (radio) muy pequeño, casi cero.

Ejemplo 2.

En el intervalo $A = \langle -1, 2 \rangle$ se tiene:

- Una vecindad de -1 es $V_\varepsilon(-1) = \{ x \in \mathbb{R} / |x + 1| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \}$
- Una vecindad de 2 es $V_\varepsilon(2) = \{ x \in \mathbb{R} / |x - 2| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \}$

❑ **1.3** Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(|a| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ implica $a = 0)$

<u>Demostración</u>: (Por el absoluto)

1. Supongamos que $a \neq 0$
2. Si $a \neq 0$, entonces $|a| > 0$, también $\frac{|a|}{2} > 0$

3. Como $|a| < \varepsilon$ es verdadero $\forall\, \varepsilon > 0$, en particular es verdadero si escojo $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$

   Luego: $|a| < \frac{|a|}{2} \iff 2\,a| < |a|$

   $\iff 2 < 1$ es un absoluto.

4. Por tanto, debe ser $a = 0$

   Hemos aplicado la tautología: $(P_1 \wedge P_2 \Rightarrow q) \equiv (P_1 \wedge \sim q \Rightarrow \sim P_2)$

   Donde: $P_1 : |a| < \varepsilon\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0$

   $P_2 : 1 < 2$

   $q : a = 0$

☐ 1.4 APLICACIONES

La proposición 1.3 se aplica en los conceptos de límite. Así por ejemplo:

a) La desigualdad $|a_n - \ell| < \varepsilon\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0$

implica $(a_n - \ell) \to 0 \iff a_n \to \ell$ — Se lee a_n tiende a ℓ.

b) La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0$

implica $f(x) \to L$

☐ 1.5 AXIOMA (Propiedad Arquimediana)

Sí a y b son dos números reales positivos, entonces existe un número entero positivo n tal que $a < nb$.

Una consecuencia de este axioma es: "$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, n \in Z^+$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$"

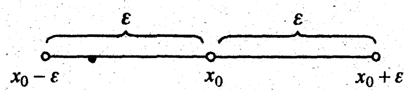
Esta proposición es muy importante para acotar los términos de una sucesión de números reales.

☐ 1.6 VECINDAD REDUCIDA

Dado un número real x_0, diremos que $V'_\varepsilon(x_0)$ es una vecindad reducida de x_0, sí.

$$V'_\varepsilon(x_0) = V_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}$$

Es decir, la vecindad reducida de x_0 de radio $\varepsilon > 0$ es la vecindad de x_0 excluyendo el punto x_0.



$$V'_\varepsilon(x_0) = \{x \in I\!R \,/\, |x - x_0| < \varepsilon\} - \{x_0\}$$
$$= \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle - \{x_0\}$$

❒ 1.7 PUNTO DE ACUMULACIÓN

Definición 1: **Dado un subconjunto** A de números reales $(A \subset R)$, diremos que un punto $x_0 \in R$ **es un punto de acumulación de A,** si cualquier vecindad $V_\varepsilon(x_0)$ contiene por lo menos un **punto x de A distinto de x_0**.

Definición 2: **Sea** $A \subset I\!R$, **diremos** que $x_0 \in I\!R$ es punto de acumulación de A, sí $V'_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \phi$.

Es decir:

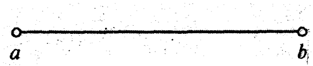
$$x_0 \in I\!R \text{ es p.a. de } A \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;;\; V'_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \phi$$
$$\iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x \in A) \;;\; 0 < |x - x_0| < \varepsilon$$

Ejemplo 1.

Probar que b es el punto de acumulación del intervalo abierto $A = \langle a, b \rangle$, $a < b$.

<u>Demostración</u>:

El problema es construir el tamaño de ε.



Bastará hacer: $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$ y la vecindad reducida será:

$$V'_\varepsilon(b) = \{x \in I\!R \,/\, |x - b| < \varepsilon\}$$
$$= x \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle - \{b\}$$

Faltaría probar que $V'_\varepsilon(b) \cap A$ es no vacío.

Debo probar que un elemento de $V'_\varepsilon(b)$ también sea elemento de A.

Veamos: Si $x \in V'_\varepsilon(b) \Rightarrow |x-b| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x-b| < \frac{|b-a|}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|b-a|}{2} < x-b < \frac{|b-a|}{2}$$

Como $a<b$ $\quad \Rightarrow b-\frac{|b-a|}{2} < x < b+\frac{|b-a|}{2}$

$\Rightarrow b-a>0$ $\quad \Rightarrow b-\frac{b-a}{2} < x < b+\frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow |b-a| = b-a$ $\quad \Rightarrow \frac{b+a}{2} < x < \frac{3b-a}{2}$

$$a < \frac{b+a}{2} < x < b < \frac{3b-a}{2}$$

$$\Rightarrow a < x < b$$

Luego: $x \in \langle a,b \rangle$

Es decir $V'_\varepsilon(b) \cap A \neq \phi$, para $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$

Por tanto: b es punto de acumulación de A.

Ejemplo 2.

Probar que 2 es punto de acumulación de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{2n+1}{n}$.

<u>Demostración:</u>

Una vecindad reducida de 2 es: $V'_\varepsilon(2) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-2| < \varepsilon\} - \{2\}$

$$= x \in \langle 2-\varepsilon, 2+\varepsilon \rangle - \{2\} \ , \ \forall\, \varepsilon > 0$$

Debo probar que existe por lo menos un elemento $x = a_n$ de la sucesión tal que sea elemento de $V'_\varepsilon(2)$

Veamos:

Recomendación: *Para sucesiones aplicar la propiedad Arquimediana.*

En primer lugar, veamos qué forma tiene un elemento de la sucesión:

Se tiene: $a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

Por la propiedad Arquimediana se cumple:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in Z^+$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Sumar 2: $2 + \frac{1}{n} < \varepsilon + 2$

Pero: $2 - \varepsilon < 2 + \frac{1}{n} < 2 + \varepsilon$, $\forall n \in Z^+$

Lo cual implica: $a_n \in V'_\varepsilon(2)$, $a_n = 2 + \frac{1}{n}$

Hemos probado que existe un elemento $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ de la sucesión que también está en $V'_\varepsilon(2)$, $\forall \varepsilon > 0$.

Por tanto: 2 es punto de acumulación de $(a_n)_{n \geq 1}$

EJERCICIOS Sección 1.7

1. Dado el intervalo $A = \langle a, b \rangle$, probar que "a" es punto de acumulación.
2. Sea el conjunto $A = \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$ probar que lo números reales 1, 2 y 5 son puntos de acumulación de A.
3. Probar que el único punto de acumulación de $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ es "0".
4. Sea el conjunto $B = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = (-1)^n \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$, probar que 2 y -2 son puntos de acumulación de B.
5. Probar que $\frac{3}{2}$ es punto de acumulación del conjunto:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

6. Probar que $\frac{1}{2}$ es punto de acumulación del conjunto:

$$N = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \left(\frac{n^2-1}{2n^2+3} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

7. Probar que 0 es punto de acumulación de la sucesión $\left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$

8. Probar que 1 es punto de acumulación de la sucesión $((2n)^{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}$

9. Sea la sucesión: $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$. Defino: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

   Probar que 2 es punto de acumulación de $(S_n)_{n\geq 0}$

10. Sea la sucesión $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ Defino: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$

    Probar que "1" es punto de acumulación de $(S_n)_{n\geq 1}$

SERIES

Definición: Una serie numérica $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si existe $\lim_{n\to\infty} S_n$, donde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ejemplo:

Si $|r| < 1$, ¿es convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$?

Solución:

Definimos: $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$

$$= 1 + r + r^2 + \ldots r^{n+1}$$

$$= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$= \frac{1}{1-r} \quad , \quad \text{porque } \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$$

◆ El límite $\frac{1}{1-r}$ se llama suma de la serie.

PROBLEMAS

Hallar la suma de las siguientes series:

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$ **R.** $\frac{2}{3}$

2. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$ **R.** $\frac{3}{2}$

3. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$ **R.** 3

4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ **R.** 1

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ **R.** $1-\sqrt{2}$

Para cada función $f(x)$ con dominio el intervalo cerrado $[a,b]$, definimos la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ del siguiente modo:

$$S_n=(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{(b-a)}{n}\right), \text{ se pide hallar } \lim_{n\to+\infty} S_n .$$

1. $f(x)=x \quad , \quad x\in[1,3]$ **R.** 5

2. $f(x)=x^2 \quad , \quad x\in[1,3]$ **R.** $\frac{28}{3}$

3. $f(x)=x^3 \quad , \quad x\in[0,2]$ **R.** 4

4. $f(x)=2x+3 \quad , \quad x\in[0,2]$ **R.** 7

5. $f(x)=4-x^2 \quad , \quad x\in[0,2]$ **R.** $\frac{16}{3}$

6. $f(x)=x^2+2 \quad , \quad x\in[1,3]$ **R.** $\frac{38}{3}$

7. $f(x)=9-x^2 \quad , \quad x\in[1,3]$ **R.** $\frac{26}{3}$

CAPÍTULO 2

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

❒ 2.1 INTRODUCCIÓN

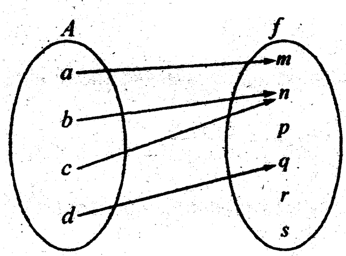
Antes de definir una sucesión de números reales debemos recordar las siguientes definiciones:

1. El conjunto de los números naturales es: $I\!N = \{0,1,2,3,\ldots\}$

2. El conjunto de los números naturales positivos es: $I\!N^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$

3. Dados dos conjuntos A y B diremos que f es una aplicación de A en B (Denotamos por $f : A \longrightarrow B$), si para cada elemento $x \in A$ corresponde un sólo elemento $y \in B$ tal que $y = f(x)$.

   Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{m,n,p,q,r,s\}$.
   Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es:



$f(a) = m$

$f(b) = n$

$f(c) = n$

$f(d) = q$

4. Dada la aplicación $f : A \longrightarrow B$

   Diremos:

   i) f es inyectiva, Si $f(a) = f(b)$ implica $a = b$, $\forall\, a,b \in A$

   ii) f es inyectiva, Si $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$, $a \in A$, $b \in A$

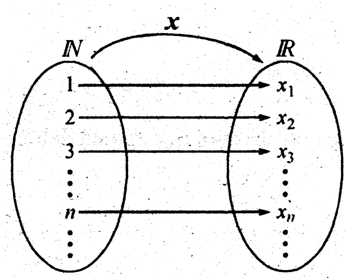
   iii) f es suryectiva, Si $\forall\, y \in B$, $\exists\, x \in A$ tal que $y = f(x)$

   iv) f es suryectiva, Si $f(A) = B$

   v) f es biyectiva, Si f es inyectiva y suryectiva.

❐ 2.2 SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

Definición: Una sucesión de números reales es una aplicación $\begin{array}{l} x: I\!N^+ \longrightarrow I\!R \\ \quad n \longrightarrow x_n \end{array}$ tal que a cada número $n \in I\!N^+$ corresponde un sólo número real x_n.



También podemos decir, que una sucesión de números reales es una aplicación $x: I\!N^+ \longrightarrow I\!R$, definida en el conjunto $I\!N^+ = \{1,2,3,\ldots\}$ y toma valores en el conjunto de los números reales $I\!R$.

En la aplicación $\begin{array}{l} x: I\!N^+ \longrightarrow I\!R \\ \qquad n \longrightarrow x(n) \end{array}$

El valor $x(n)$ será representado por x_n, $\forall\, n \in I\!N^+$ y la llamaremos el "n-ésimo término de la sucesión".

Notación: $(x_n)_{n\geq 1}$ denota la sucesión $x: I\!N^+ \longrightarrow I\!R$ que al expresar por "extensión" es:

$$(x_n)_{n\geq 1} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$$

n-ésimo término.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ Son los términos de la sucesión.

Ejemplos:

Son sucesiones de números reales:

1. $(2n)_{n\geq 1}$ que al expresarse por extensión es: $(2n) = (2,4,6,\ldots,2n,\ldots)$.

2. $(2n-1)_{n\geq 1}$ que al expresarse por extensión es: $(2n-1) = (1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots)$.

3. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$.

4. $(3)_{n\geq 1} = (3,3,3,\ldots,3,\ldots)$ es la sucesión constante.

5. $(x_n)_{n\geq 1}$, donde $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ que al expresar por ***extensión*** es: $\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,(-1)^n\frac{1}{n},\ldots\right)$ es una sucesión alternante.

2.3 SUCESIÓN ACOTADA

Sea la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$. Diremos que $(x_n)_{n\geq 1}$, es acotada, si existen dos números reales a y b tales que $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

Como $a \leq x_n \leq b$ entonces $|x_n| \leq c$, $c = \text{máx}\{|a|,|b|\}$

Podemos hacer la siguiente definición:

$(x_n)_{n\geq 1}$ es **ACOTADA**, sii $\exists\, c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$, $\forall\, n \in I\!N^+$

Ejemplo: La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ es acotado, porque $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

2.4 SUCESIÓN ACOTADA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE.

a) $(x_n)_{n\geq 1}$ es **ACOTADA SUPERIORMENTE**, sí $\exists\, b \in I\!R$ tal que $x_n \leq b$, $\forall\, n \in I\!N^+$.
En este caso los términos de la sucesión: $x_n \in \langle -\infty, b]$.

b) $(x_n)_{n\geq 1}$ es **ACOTADA INFERIORMENTE**, sí $\exists\, a \in I\!R$, tal que $a \leq x_n$, $\forall\, n \in I\!N^+$.
En este caso los términos de la sucesión: $x_n \in [a, +\infty\rangle$.

c) Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es acotada sí y solamente sí es acotada superior e inferiormente.

Ejemplos:

1. La sucesión $(2n)_{n\geq 1} = (2,4,6,\ldots)$ es **acotada** inferiormente. Pues $\exists\, 2 \in I\!R$ tal que $2 \leq 2n$. $\forall\, n \in I\!N^+$.

2. La sucesión $(1-2n)_{n\geq 1}$ es acotada superiormente. Pues existe $-1 \in \mathbb{R}$, tal que $1-2n \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

❒ 2.5 SUCESIÓN CRECIENTE, NO DECRECIENTE, DECRECIENTE, NO CRECIENTE Y MONÓTONA.

1. Una sucesión (x_n) llámase **CRECIENTE** cuando $x_n < x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.
2. Una sucesión (x_n) es **NO DECRECIENTE**, si $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.
3. Una sucesión (x_n) es **DECRECIENTE**, si $x_n > x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.
4. Una sucesión (x_n) es **NO CRECIENTE**, si $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$.
5. Las sucesiones crecientes, no decrecientes, decrecientes y no crecientes se llaman sucesiones **MONÓTONAS**.

Ejemplos:

1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ es decreciente, porque: $n < n+1$ implica $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.
2. La sucesión $(2n)_{n\geq 1}$ es creciente, porque: $n < n+1$ implica $2n < 2(n+1)$

❒ 2.6 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Partamos de un ejemplo particular, para luego hacer la definición.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$

Nuestro interés es estudiar si los términos x_n se aproximan a un número real "a" cuando n es cada vez más grande.

Veamos: $\quad x_n = \dfrac{2n+1}{n} = 2 + \dfrac{1}{n}$

Si $n=1$, $x_1 = 2+1$

Si $n=2$, $x_2 = 2+\frac{1}{2}$

$\vdots$

Si $n=1000$, $x_{1000} = 2+\frac{1}{1000}$

$\vdots$

Si $n \to \infty$, $x_n \to 2$, porque $\frac{1}{n}$ se acerca a cero $\left(\frac{1}{n} \to 0\right)$ cuando n es muy grande $(n \to \infty)$.

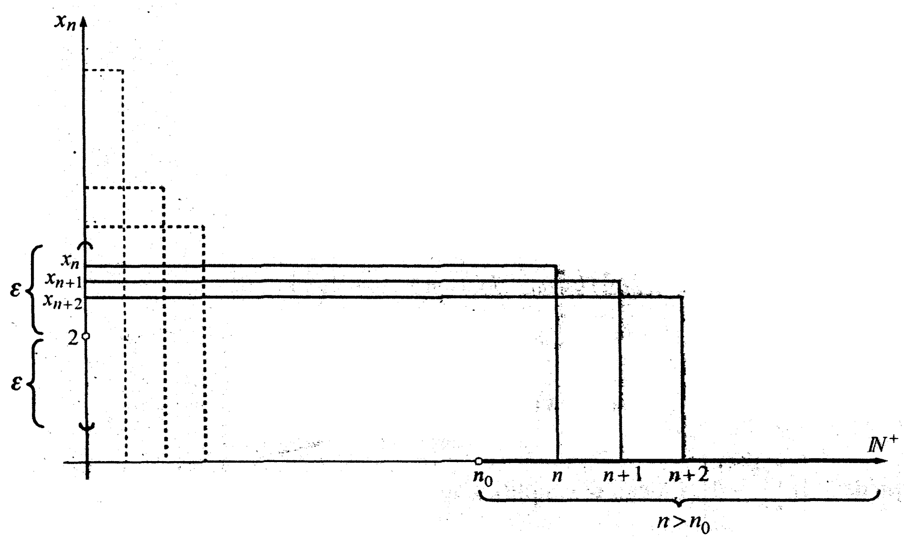
Lo que ha ocurrido es la siguiente implicación:

cuando $n \to \infty$ entonces $x_n \to 2$

n tiende a ∞ —— x_n converge a 2

Queremos que la diferencia $(x_n - 2)$ sea muy pequeña, tan pequeña que casi es cero, es decir $|x_n - 2| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, esto es posible si existe un número natural n_0 que depende de ε tal que $\forall\, n > n_0$ los términos x_n se acercan a 2.

Ilustración gráfica:



Como vemos: Para cada número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente ***es posible obtener un número natural*** $n_0(\varepsilon)$ tal que $|x_n - 2| < \varepsilon$ siempre que $n > n_0$.

Según esta definición nuestro problema es hallar n_0 en términos de ε, siendo ε cualquier número real positivo (muy pequeño).

Veamos: $|x_n - 2| = \left|\overbrace{2+\frac{1}{n}}^{x_n} - 2\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

Pero $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$ es verdadero (Propiedad Arquimediana).

invertir: $n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{n_0}$, en este caso $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

Como deseamos que n_0 sea un número natural, hacemos $n_0 = \left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$.

Definición:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{s.s.s} \quad (\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, n_0 \in I\!N.)\,;\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Donde: $\forall$ significa "para todo" 0 "cualquiera que sea"
$\exists$ significa "existe"
; significa "tal que"
$\Rightarrow$ significa "implica"

Ejemplo 1. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

<u>Demostración:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{s.s.s.} \quad (\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, n_0 \in I\!N)\,;\; n > n_0 \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$$

Búsqueda de n_0 en términos de ε

Se parte de: $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right|$ y luego se simplifica aplicando propiedades de valor absoluto.

Así: $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pero: $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$

$$2^{-n} < \varepsilon$$

$$\text{Ln}(2^{-n}) < \text{Ln}\,\varepsilon$$

$$-n\text{Ln}2 < \text{Ln}\,\varepsilon$$

$$n\text{Ln}2 > -\text{Ln}\,\varepsilon$$

$$n > \underbrace{\frac{-\text{Ln}\,\varepsilon}{\text{Ln}2}}_{n_0} \quad , \quad \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{Ln}\,\varepsilon < 0$$

Hacer: $n_0 = \left[\!\left[\frac{-Ln\varepsilon}{Ln2} \right]\!\right] + 1$, para todo ε positivo pequeño.

Ejemplo 2. Sea la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n(z) = \frac{z+n}{z-n}$.

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = -1$, $\forall Z$ tal que $|z| < 1$, $z \in \boldsymbol{C}$.

Prueba:

Por definición: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in I\!N)$; $n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - (-1)| < \varepsilon$

Búsqueda de n_0 en términos de ε

De: $\left|f_n(z) - (-1)\right| = \left|\frac{z+n}{z-n} + 1\right| = \left|\frac{z+n+z-n}{z-n}\right| = \left|\frac{2z}{z-n}\right| = \frac{2|z|}{|n-z|}$

A continuación, acotemos: a) $|z| < 1 \Rightarrow 2|z| < 2$

b) $|n| - |z| \leq |n - z|$

$$n - |z| \leq |n - z|$$

$$n - 1 < n - |z| \leq |n - z| \quad , \quad \text{Pues} \quad |z| < 1$$

$$-|z| > -1$$

$$n - 1 < |n - z| \qquad\qquad n - |z| > n - 1$$

$$\frac{1}{n-1} > \frac{1}{|n-z|} \quad , \quad \forall n \geq 2$$

c) $\frac{1}{|n-z|} < \frac{1}{n-1}$

Multiplicar las desigualdades (a) $\wedge$ (c): $\frac{2|z|}{|n-z|} < \frac{2}{n-1}$

Por la propiedad Arquimediana: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}^+$ tal que:

$$\frac{2}{n-1} < \varepsilon$$

$$n-1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$n > \underbrace{1+\frac{2}{\varepsilon}}_{n_0}$$

Hacer: $n_0 = 1 + \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$

NOTA:
En este problema afirmamos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a 1 en el conjunto $A = \{Z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$

Ejemplo 3. Probar que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$, donde:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} n(x+1)}{n} \text{ converge a “0” } \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ s.s.s. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_0(\varepsilon))$ tal que:

si $n > n_0 \wedge x \in \mathbb{R}$ entonces $\left|\frac{\operatorname{sen} n(x+1)}{n} - 0\right| < \varepsilon$

Búsqueda de n_0 en términos de ε

Se cumple: $\left|\frac{\operatorname{sen} n(x+1)}{n}\right| = \frac{|\operatorname{sen} n(x+1)|}{|n|}$

Pero : $\frac{|\operatorname{sen}(n(x+1))|}{n} \leq 1$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$

Por $\frac{1}{n}$: $\frac{|\text{sen}(n(x+1))|}{n} \leq \frac{1}{n}$

Pero : $\frac{1}{n} < \varepsilon$; $\forall\, \varepsilon > 0$ (principio Arquimediano)

$\Rightarrow$ $n > \frac{1}{\varepsilon}$

hacer $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Hemos probado que existe n_0 en términos de ε.

TEOREMA 1 (Unicidad del límite)
Si el límite de una sucesión (x_n) existe, es única.

Demostración:

El teorema de unicidad se puede enunciar, también, del siguiente modo.

$$\text{Si} \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} x_n = b \ , \text{ entonces } a = b$$

La demostración es por el absurdo.

1. Supongamos que $a \neq b$ .... $(\sim q)$

2. Si $a \neq b$, entonces $|a-b| > 0$

3. Pero: $|a-b| = |a - x_n + x_n - b| = |-(x_n - a) + (x_n - b)|$
$$\leq |-(x_n - a)| + |x_n - b|$$
$$= |x_n - a| + |x_n - b|$$

4. Por hipótesis se tiene: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces:

(para $\varepsilon > 0$) $(\exists\, n_0' \in I\!N)$ t.q. $n > n_0' \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim_{n\to\infty} x_n = b$, entonces:

(para $\varepsilon > 0$) $(\exists\, n_0'' \in I\!N)$ t.q. $n > n_0'' \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

5. Por 4 y 3 obtenemos: $|a-b| \le |x_n - a| + |x_n - b|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad , \text{ si } \quad n > n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$$

6. La desigualdad $|a-b| < \varepsilon$ se cumplen $\forall\, \varepsilon > 0$, en particular debe cumplirse para $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, siempre que $n > n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$

Así tendremos: $|a-b| < \varepsilon$

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$$

$2 < 1$ ***es una contradicción***

7. La contradicción se presento por haber supuesto que $a \ne b$. Debe ser entonces que $a = b$.

NOTA:

Hemos aplicado la tautología: $[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \Rightarrow q] \equiv [(P_1 \wedge P_2 \wedge \sim q) \rightarrow \sim P_3]$

Donde: $P_1: \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$, $P_2: \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = b$, $P_3:\ 1 < 2$ $\sim q:\ a \ne b$

Definición.- Sí una sucesión (x_n) tiene como único límite el número real "a" diremos que (x_n) converge al número real "a".

En caso contrario diremos que la sucesión no es convergente.

Ejemplos:

1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\ge 1}$ converge a "0".

2. La sucesión $\left(\frac{1-2n}{n+3}\right)_{n\ge 1}$ converge al número real "$-\frac{2}{3}$"

3. La sucesión $(x_n)_{n\ge 1}$ donde $x_n = (-1)^n \frac{1-2n}{1+n}$ no es convergente, porque tiene dos límites:

   i) Cuando n es par, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$

   ii) Cuando n es impar, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

4. La sucesión $(2n)_{n\geq 1}$ no es convergente, porque $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)=+\infty$, $+\infty$ no es $I\!R$.

☐ 2.7 LÍMITES ESPECIALES

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\text{sen}(nx)}{n}=0$, $\forall\, x\in I\!R$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

El cálculo del $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, es del siguiente modo:

Hacer: $a=n^{\frac{1}{n}}$, $a>0$

$$\Rightarrow \quad \text{Ln}\,a=\frac{1}{n}\text{Ln}(n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\text{Ln}\,a)=\lim_{n\to\infty}\frac{\text{Ln}(n)}{n}$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\left(\lim_{n\to\infty}a\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\text{Ln}(n)}{n} \quad \text{...... Aplicar L'Hopital}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\left(\lim_{n\to\infty}a\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}a=e^0$$

$$=1$$

EJERCICIOS Sección 1.7

BLOQUE I

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, si

1. $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$ **R.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

6. $x_n=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ **R.** $\dfrac{1}{2}$

2. $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ **R.** 1

3. $x_n = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$ **R.** 0

4. $x_n = n(n - \sqrt{n^2+1})$ **R.** -1

5. $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$ **R.** $\frac{4}{3}$

7. $x_n = \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$ **R.** $\frac{9}{16}$

8. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ **R.** $\frac{1}{2}$

9. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$ **R.** 1

10. $x_n = \sqrt{2n+3}\,(\sqrt{4n+1} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})$ **R.** $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$

BLOQUE II

11. Si $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots,$
$x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}$, $a > 0$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$. **R.** $\dfrac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$

12. Sí $x_n = n[\text{Ln}(n+1) - \text{Ln}(n)]$, calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$

13. Sí $x_n = n[a^{\frac{1}{n}} - 1]$, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **R.** Ln a.

14. Sí $x_1 > 1$ y $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ para $n \geq 2$. Encontrar el límite de (x_n). **R.** 2

15. Sean $y_1 = 1$, $y_{n+1} = \sqrt{2+y_n}$, $n \geq 1$. Encontrar el límite de (y_n). **R.** 2

16. Sean $x_1 = b$, $b > 0$ y $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Determinar si (x_n) converge o diverge.

17. Sea $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $\forall n \geq 1$. Hallar $\text{Lim}(x_n)$ **R.** 1

18. Sea $x_1 = 1$ y definimos $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Hallar $\text{Lim}(x_n)$ **R.** 3

19. Sea (a_n) una sucesión definida recursivamente mediante:

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1) \quad , \quad n \geq 1$$

a) Demostrar que $a_n < 2$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

b) Demostrar que es estrictamente decreciente.

c) Hallar $\inf\{a_n \,/\, n \in I\!N^+\}$

20. Sea (x_n) una sucesión definida recursivamente mediante.

$$x_1 = a$$

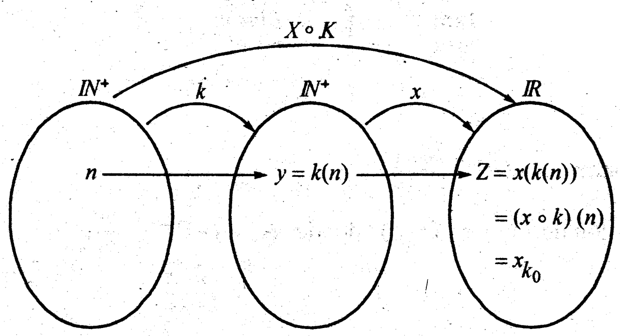
$$x_{n+1} = a_n + ar^n \quad , \quad \forall\, n \geq 1$$

Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si $|r| < 1$. **R.** $\frac{a}{1-r}$

❏ 2.8 SUB SUCESIÓN

Definición: Una subsucesión de una sucesión $\begin{array}{l} x : I\!N^+ \longrightarrow I\!R \\ \quad\; n \longrightarrow x(n) \end{array}$ es una sucesión de la forma $\begin{array}{l} k \circ x : I\!N^+ \longrightarrow I\!R \\ \qquad\;\; n \longrightarrow (k \circ x)(n) \end{array}$ donde $k : I\!N^+ \longrightarrow I\!N^+$ es una función creciente (esto es $k(m) > k(n)$, si $m > n$)

Lo que ha sucedido es la siguiente composición de funciones:



Notación: Una subsucesión de (x_n) se denota por (x_{k_n}).

Ejemplo 1.

Sea la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ donde $x_n = (-1)^n \frac{n}{1+2n}$

a) Si $k(n)=2n$, entonces $(x \circ k)(n)=x(k(n))$

$$k_n=2n \qquad \begin{aligned} &= x(2n) \\ &= (-1)^{2n}\frac{2n}{1+2(2n)} \end{aligned}$$

$$x_{k_n}=\frac{2n}{1+4n}$$

b) Sí $k_n=2n-1$, entonces $x_{k_n}=(-1)^{2n-1}\dfrac{2n-1}{1+2(2n-1)}$

$$=-\frac{2n-1}{4n-1}$$

Ejemplo 2.

Sea la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, donde $x_n=\dfrac{2n-1}{1+3n}$

a) Una subsucesión de (x_n) es (x_{2n}), donde $x_{2n}=\dfrac{2(2n)-1}{1+3(2n)}$

$$=\frac{4n-1}{1+6n}$$

b) Otra subsucesión de (x_n) es (x_{3n-1}), donde $x_{3n-1}=\dfrac{2(3n-1)-1}{1+3(3n-1)}$

$$=\frac{6n-3}{9n-2}$$

Donde: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n-1}=\frac{2}{3}$

Ejemplo 3.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$, donde $x_n=(-1)^n\dfrac{2n-1}{1+4n}$

a) Una subsucesión de (x_n) es (x_{2n}), donde $x_{2n}=(-1)^{2n}\dfrac{2(2n)-1}{1+4(2n)}$

$$=\frac{4n-1}{1+8n}$$

b) Una subsucesión de (x_n) es (x_{2n-1}), donde $x_{2n-1}=(-1)^{2n-1}\dfrac{2(2n-1)-1}{1+4(2n-1)}$

$$=-\frac{4n-3}{8n-3}$$

Donde: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=-\frac{1}{2}$

De estos ejemplos se deduce una importante proposición:

> Si una sucesión es convergente, entonces cualquier subsucesión, también es convergente. Lo reciproco no es cierto.

TEOREMA 2 Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces toda subsucesión de (x_n) converge al mismo límite "a".

Demostración:

Una subsucesión de (x_n) es (x_{n_k})

Debo demostrar que:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists \text{ un subíndice de } n_{k_0} \in I\!N) \text{ tal que si } n_k > n_{k_0} \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Veamos:

1. Por hipótesis: si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ entonces para $\varepsilon > 0$, existen un número natural n_0 tal que si $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.
2. Los términos de la subsucesión (x_{n_k}) son: $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k_0}}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$
3. Como los índices de una subsucesión forman un subconjunto infinito de $I\!N$, es posible encontrar un índice k_0 tal que $n_{k_0} > n_0$.
4. Por 3. y 1. Sí $n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$, por tanto: $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

TEOREMA 3 Toda sucesión convergente es **ACOTADA**.

Demostración:

Debo demostrar que $\exists\, M > 0$ tal que $|x_n| \le M \quad \forall\, n \in I\!N^+$.

Veamos:

1. Por hipótesis: Sea (x_n) una sucesión convergente. Sí (x_n) converge al número real a, entonces: $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N \in I\!N)$ t.q. $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ .... (r)
2. La proposición (r) es verdadero $\forall\, \varepsilon > 0$, en particular será verdadero para $\varepsilon = 1$, entonces tendremos:

$$|x_n - a| < 1 \leftrightarrow x_n \in\,]a-1, a+1[$$

$$\Rightarrow \quad |x_n| - |a| \le |x_n - a| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x_n| < |a| + 1 \ , \ \forall\, n > I\!N$$

3. La desigualdad: $|x_n| < |a| + 1$ se cumple ***sólo*** para los números naturales mayores que N. Debemos hacer cumplir que $|x_n|$ sea menor que un número real positivo para ***todo*** $n \in \mathbb{N}^+$.

4. Fijemos nuestra mirada en los términos de la sucesión:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N, a-1, a+1, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} =$$

$$= \underbrace{\{x_1, x_2, \ldots, x_N, a-1, a+1\}}_{A} \cup \underbrace{\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}}_{B}$$

Se tiene:

i) A es un conjunto finito de números reales y por tanto es acotado. Supongamos que m sea el menor valor y s el mayor valor, entonces $m \le x_i \le s$ para todos los elementos de $x_i \in A$.
Pero $m \le x_i \le s \Rightarrow |x_i| \le \max\{|m|, |s|\} = K$, $1 \le i \le N$

ii) Por otro lado: $|x_n| < |a| + 1$, $\forall\, n > N$
En consecuencia por $(i) \wedge (ii)$ se deduce que $\exists\, M > 0$ tal que:
$|x_n| < M$, $\forall\, n = 1, 2, 3, \ldots, N, N+1, \ldots$

Consecuencia:
Si (x_n) es convergente implica que (x_n) es **ACOTADA**, pero, si (x_n) es acotada, no implica que (x_n) sea convergente.

Ejemplo:

La sucesión $((-1)^n)_{n \ge 1}$ cuyos elementos son: $(-1, 1, -1, \ldots)$; es **ACOTADA**. Pues $|x_n| \le 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$. Pero no es convergente, porque: $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = 1$ y $\lim x_{2n-1} = -1$.

TEOREMA 4 Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

<u>Demostración:</u>

Las hipótesis son: P_1 : (x_n) es monótona
P_2 : (x_n) es acotada

Debo probar que: $\exists\, n_0 \in I\!N$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, si $n > n_0$ para afirmar que $\text{Lim}\, x_n = a$.

1. Por P_1, pueden ocurrir dos cosas: Caso 1: (x_n) es no-decreciente
Caso 2: (x_n) es no-creciente

2. Por P_2, existen dos números reales k y s tal que $k \le x_n \le s$, $\forall\, n \in I\!N^+$

Caso 1:

i) Si (x_n) es no-decreciente, se cumple la relación:
$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n_0} \le x_{n_0+1} \le \ldots \le x_n \le \ldots$

ii) Si (x_n) es acotado superiormente, tiene supremo.
Sea $a = \sup\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Debo probar que $a = \text{Lim}\, x_n$.

3. Si a es el supremo, entonces dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe algún número natural n_0 tal que $a - \varepsilon < x_{n_0}$

Pero: $x_{n_0} \le x_n$, si $n > n_0$ [(x_n) es no-decreciente]

Luego, si $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n$
$\Rightarrow a - \varepsilon < x_n$

4. Como a es el supremo, entonces $x_n \le a$, $\forall\, n \in I\!N^+$

Así tendremos: Si $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le a$
$\Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le a < a + \varepsilon$
$\Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Lo cual implica: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Caso 2: (x_n) es no-creciente y acota inferiormente.
Debo probar que $\inf\{x_n\} = a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Queda como ejercicio……

COROLARIO. Si una sucesión monótona (x_n) posee una subsucesión convergente, entonces (x_n) es convergente.

Demostración:

Por demostrar que: (x_n) es convergente.

1. (x_n) es monótona .... (Hipótesis)

2. Si una subsucesión (x_{n_k}) es convergente, entonces es ACOTADA. Es decir, existe $M > 0$, tal que $|x_{n_k}| \leq M$, $\forall\, n_k \in I\!N^+$. En particular si $n_k = m$ entonces $|x_m| \leq M$, $m \in I\!N^+$ lo cual implica que (x_n) es acotada.

3. Según el Teorema 4: Si (x_n) es monótona y acotada, entonces (x_n) es convergente.

2.8.1 EJEMPLOS ESPECIALES

1. La sucesión $(a)_{n\geq 1} = (a, a, a, \ldots a, \ldots)$

   Se llama sucesión constante y es convergente, pues $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$

2. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_n = (-1)^n$ es acotada, pero no es convergente.

   Al expresar por ***extensión*** tenemos $(x_n) = (-1, 1, -1, \ldots)$.

   Tenemos:

   a) $(x_n)_{n\geq 1}$ es ACOTADA, porque $-1 \leq x_n \leq 1$, $\forall\, n \in I\!N^+$

   b) (x_n) no es CONVERGENTE, porque las subsucesiones (x_{2n}) y (x_{2n-1}) tienen límites diferentes: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$ y $\lim x_{2n-1} = -1$

3. La sucesión $(a^n)_{n\geq 1}$ es convergente si $0 < a < 1$

   Se cumple: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, si $0 < a < 1$

4. Sea la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ donde $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}$

Se cumple: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$, si $0 < a < 1$.

Solución:

Multiplicar por $(1-a)$ ambos miembros de la igualdad $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$

Se obtiene: $(1-a)S_n = (1-a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$

$$(1-a)S_n = 1 - a^n$$

$$S_n = \frac{1-a^n}{1-a}\text{, luego } \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}\text{; pues } \lim_{n\to\infty} a^n = 0\text{, si } 0 < a < 1$$

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in I\!N^+$; $n > n_0 \;\Rightarrow\; \left|S_n - \frac{1}{1-a}\right| < \varepsilon$

Búsqueda de n_0 en función de ε

De $\left|S_n - \frac{1}{1-a}\right| = \left|\frac{1-a^n}{1-a} - \frac{1}{1-a}\right|$

$$= \frac{a^n}{1-a}$$

$0 < a < 1$

$0 > -a > -1$, sumar 1

$1 > 1-a > 0$

al aplicar valor absoluto:

$|1-a| = 1-a$

Pero si $n > n_0 \;\Rightarrow\; \frac{a^n}{1-a} < \varepsilon$

$$\Rightarrow\; a^n < (1-a)\varepsilon$$

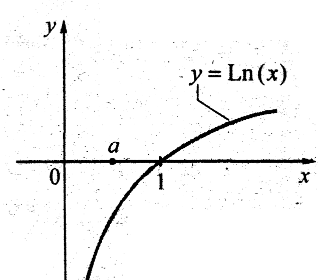
$$\Rightarrow\; n\,\mathrm{Ln}\,a < \mathrm{Ln}(1-a)\varepsilon$$

$$\Rightarrow\; -n\,\mathrm{Ln}\,a > -\mathrm{Ln}(1-a)\varepsilon$$

$$\Rightarrow\; n > \underbrace{\frac{\mathrm{Ln}(1-a)}{\mathrm{Ln}\,a}\varepsilon}_{n_0}$$

Nota: si $0 < a < 1$

entonces $\mathrm{Ln}\,a < 0$



Hacer: $n_0 = \left[\!\left[\frac{\mathrm{Ln}(1-a)\varepsilon}{\mathrm{Ln}\,a} \right]\!\right] + 1$

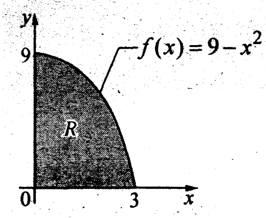
Observaciones:

Algunas aplicaciones de las sucesiones convergentes, son:

a) Hallar la solución de ecuaciones en diferencias de orden 1.
La solución de la ecuación en diferencia $2P_t + P_{t-1} = 6$

es $P_t = A\left(-\frac{1}{2}\right)^t + 2$, $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$; donde $\lim_{t\to+\infty} P_t = 2$

b) El área de la región ℓ, es:



$$\text{área}(R) = (3-0) \lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k(3-0)}{n}\right) \right\}$$
$$= 18u^2$$

❑ 2.9 PROPIEDADES ARITMÉTICAS DE LOS LÍMITES

A continuación estudiaremos el limite de una suma de sucesiones, de un producto y de una división.

TEOREMA 5. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$.

Demostración:

Debo probar que: Dado un $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in I\!N^+$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - 0| < \varepsilon$.

Veamos:

1. Sí $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces dado $\varepsilon_1 > 0$, $\exists\, n_0 \in I\!N^+$,
   tal que: $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon_1$ .... (1)

2. Si (y_n) es **ACOTADA**, entonces $\exists\, M > 0$ tal que:
   se cumple $|y_n| < M$ .... $\forall\, n \in I\!N^+$ .... (2)

3. Al multiplicar (1) $\wedge$ (2): $|x_n||y_n| < M\varepsilon_1$
   $|x_n y_n| < M\varepsilon_1$ .... (3)

4. Como, la proposición en (1) se cumple $\forall\, \varepsilon_1 > 0$, en particular se cumplirá para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$, que al reemplazar en (3) obtendremos: $|x_n\, y_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ siempre que $n > n_0$, lo cual implica que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\, y_n = 0$.

TEOREMA 6 Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces:

1. $\lim (x_n + y_n) = a + b$; $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$

2. $\lim (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

3. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, si $b \neq 0$

Prueba de 1.

Debo probar que: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in I\!N^+$; $n > n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$

<u>Veamos</u>:

1) En $|(x_n + y_n) - (a + b)|$ aplicar la desigualdad triangular que nos permita usar las hipótesis.

Así: $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq \underbrace{|x_n - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_n - b|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$

Necesariamente debe ser: $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ para afirmar que $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

2) Por hipótesis:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\, n_1 \in I\!N^+$; $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < 1\,\frac{\varepsilon}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\, n_2 \in I\!N^+$; $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

3) Por tanto, si escogemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces:

$\forall\, n > n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$

Lo cual prueba que $\text{Lim}(x_n + y_n) = a + b$

Observaciones:
Se escoge $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ porque n debe ser suficientemente **grande** para que toda vez que $n > n_0$, los términos $(x_n + y_n)$ se acerquen al número $a + b$.

Prueba de 2.

Debo demostrar que: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N^+$, tal que si $n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - ab| < \varepsilon$

Veamos:

1) Hacer: $$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab|$$
$$= |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)|$$
$$\leq \underbrace{|y_n|}_{M}\ \underbrace{|x_n - a|}_{\frac{\varepsilon}{2M}} + \underbrace{|a|}_{|a|+1}\ \underbrace{|y_n - b|}_{\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}} < \varepsilon$$

2) Bastará, aplicar las hipótesis:

a) Como (y_n) converge al número b, entonces es acotada; es decir:

$\exists\, M > 0$ tal que $|y_n| \leq M \quad \forall\, n \in I\!N^+$

b) Como $|a| < |a| + 1$; $\forall\, a \in I\!R \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces:

Dado $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$, existe $n_1 \in I\!N^+$ tal que. Si $n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |y_n - b| < \varepsilon_1$

c) Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces dado $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$, existe $n_2 \in I\!N^+$ tal que, si $n > n_2 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_2$

3) Aplicar la hipótesis a), b) y c) en (1) y escogiendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ se tiene:

$\forall\, n > n_0$ implica $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$. Lo cual prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

Otra manera más sencilla de probar, es aplicando el Teorema 5 y la siguiente proposición:

Sí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.

Veamos:

Para afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$ bastará probar que: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = 0$

Pasos a seguir:

1) $(x_n y_n - ab) = (x_n y_n - a y_n + a y_n - ab)$

$$= y_n(x_n - a) + a(y_n - b)$$

2) Luego: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_n - a) + \lim\limits_{n\to\infty} a(y_n - b)$

3) Aplicando las hipótesis:

a) Como (y_n) es **ACOTADA** (por ser convergente) y $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_n - a) = 0$ .... (**Por** Teo. 5)

b) Como $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - b) = 0 \wedge a \in I\!R$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a(y_n - b) = 0$

4) Al aplicar en (2), obtenemos: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = 0$

Prueba de 3.

Al definir el $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, aparece la diferencia $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$.

El punto de partida para razonar, es la diferencia $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$

Donde: $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{by_n}$

Si pensamos aplicar el Teorema 5, deberemos probar que la sucesión $\frac{1}{by_n}$ es acotada y que $\lim\limits_{n\to\infty}(bx_n - ay_n) = 0$ para afirmar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$

En efecto:

1) Como $\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b$, entonces $\lim(bx_n - ay_n) = ba - ab = 0$

2) Faltará probar que la sucesión $\frac{1}{by_n}$ es acotada.

Obviamente que esto es verdadero ya que $\left(\frac{1}{by_n}\right)$ es convergente, pues; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{by_n}=\frac{1}{b^2}$, $b\neq 0$.

Entonces dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in I\!N$ tal que,

Si $\quad n>n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{by_n}-\frac{1}{b^2}\right|<\varepsilon$

De $\quad \left|\frac{1}{by_n}-\frac{1}{b^2}\right|<\varepsilon$ deducimos;

$\left|\frac{1}{by_n}\right|-\left|\frac{1}{b^2}\right|<\varepsilon$ .... Propiedad

$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{by_n}\right|<\frac{1}{b^2}+\varepsilon,\ \varepsilon$ es muy pequeño

$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{by_n}\right|\leq\frac{1}{b^2}\ ,\ \forall n\in I\!N^+$

3) Si $Lim(bx_n-ay_n)=0\ \wedge\ \left(\frac{1}{by_n}\right)$ es **ACOTADA.** Entonccs $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{by_n-ay_n}{by_n}\right]=0$, $by_n\neq 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{Lim}\left[\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right]=0$$

Lo cual implica que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$

Nota:
Hay otras dos formas de probar.

Por ejemplo: 1° Probar que $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}$, $\quad b\neq 0$

2° Aplicar en $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\text{Lim}\left[(x_n)\frac{1}{y_n}\right]$

$$=[\text{Lim}\,x_n]\left[\text{Lim}\frac{1}{y_n}\right] \ \ldots\ldots \text{ etc.}$$

TEOREMA 7 (Permanencia del signo)

Sí $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ \wedge\ a>0$, entonces existe $n_0\in I\!N^+$ tal que $\forall\ n>n_0$ implica $x_n>0$.

Demostración:

Sí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N^+$

tal que, $\forall\, n > n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon$.

$\Rightarrow\; x_n \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$, donde $a > 0$

Como ε es número real positivo arbitrario y "múy" pequeño se puede elegir: $\varepsilon = \frac{a}{2}$, por hipótesis $a > 0$.

$$x_n \in \left\langle a - \tfrac{a}{2}, a + a \right\rangle \iff x_n \in \left\langle \tfrac{a}{2}, 2a \right\rangle$$

$$\iff \tfrac{a}{2} < x_n < 2a$$

Lo cual prueba que $\forall\, n > n_0 \;\Rightarrow\; x_n > 0$.

TEOREMA 8 (del Sandwich)

Sean $x_n \le z_n \le y_n$; $\forall\, n \in I\!N^+$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, entonces $\lim z_n = a$

Demostración:

Debo probar que existe un número natural n_0 tal que: Si $n \ge n_0 \Rightarrow \underbrace{|z_n - a| < \varepsilon}_{z_n \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle}$, $\forall\, \varepsilon > 0$

Veamos:

1. Según las hipótesis
   a) Si $\lim x_n = a$, entonces: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in I\!N^+$ tal que:
   $\forall\, n > n_1$ implica $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

   b) Si $\lim y_n = a$, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_2 \in I\!N^+$ tal que:
   $\forall\, n > n_2$ implica $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

   c) Como $x_n \le z_n \le y_n$, $\forall\, n \in I\!N^+$ podemos elegir:
   $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tal que para $n > n_0$
   └── muy grande.

implica $a-\varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a+\varepsilon$

$\Rightarrow a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$

2. Porque $\forall\, n > n_0$ implica $a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, afirmamos que $\text{Lim}\, z_n = a$

❐ 2.10 SUCESIÓN DE CAUCHY

Introducción: La proposición: "$\forall\, n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$" nos indica que cuando n es suficientemente grande ($n > n_0$, es decir $n \to +\infty$) entonces la diferencias del término x_0 y el límite "a" es muy pequeña ($|x_n - a| < \varepsilon$).

Dicho de otra manera: la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$ implica que $(x_n - a) \to 0$, es decir $x_n \to a$ cuando $n > n_0$. Donde n_0 es un número natural muy grande.

La desigualdad $|x_m - x_n| < \varepsilon$ implica que $(x_m - x_n) \to 0$, esto implica $x_m \to x_n$.

Es decir cuando m y n son números naturales muy grandes entonces la diferencia $x_m - x_n$ es muy pequeño, casi cero. Lo cual nos dice que los términos x_m y x_n están tan próximos que casi se confunden entre sí. Este concepto nos conduce a definir la sucesión de Cauchy.

Definición: Sea (x_n) una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión (x_n) es de Cauchy si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 suficientemente grande, tal que $m > n_0 \wedge n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Observaciones:

1. m y n son números naturales muy grandes (tienden al infinito), en el cual $m \ge n \vee n \ge m$.

2. Según la definición, cuando $m \wedge n$ son muy grandes, entonces x_m y x_n están muy próximos entre sí.

LEMA 1. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

<u>Demostración:</u>

Se debe probar que existen dos números reales α y β tales que $\alpha \le x_n \le \beta$, $\forall\, n \in I\!N^+$

Lo que es equivalente en probar que: existe un número real $M > 0$, tal que $|x_n| \leq M$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

Veamos:

1. Según hipótesis: (x_n) es de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in I\!N^+$ tales que, si $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

2. Según esta definición se tiene: m y n suficientemente grandes y son variables, siendo n_0 fijo y ε es pequeño y arbitrario.

3. Como m y n varían, lo que se puede hacer es fijar m y hacer variar n. De la siguiente manera:

   Haciendo $m = n_0$ y eligiendo $\varepsilon = 1$ (porque ε es arbitrario)

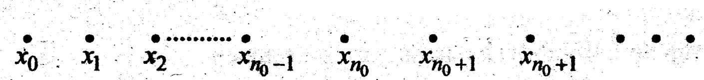
   La definición dada en 1 es: $\forall\, n > n_0 = m \;\Rightarrow\; |x_{n_0} - x_n| < 1$

   $\Rightarrow\; x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$, x_{n_0} es fijo.

   Esta desigualdad nos indica que los términos: x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ... están dentro del intervalo $\langle x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1 \rangle$.

   También podemos afirmar que: $|x_n| < |x_{n_0}| + 1$, $\forall\, n \geq n_0$; puesto que: $|x_{n_0} - x_n| \geq |x_n| - |x_{n_0}|$.

   Lo que nos faltaría es analizar qué suerte tienen los términos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$, ¿Cómo los introducimos dentro de un intervalo?



   Lo que se puede hacer es elegir: $M = \sup\{|x_1|, |x_2| \ldots |x_{n_0}|, |x_{n_0}| + 1\}$

   Por lo tanto, $|x_n| \leq M$, $\forall\, n \in I\!N^+$

   Es decir, la sucesión (x_n) es acotada.

LEMA 2. Si una sucesión de Cauchy (x_n) posee una subsucesión que converge al número real a, entonces $\text{Lim}\, x_n = a$.

Demostración:

Se debe probar que: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in I\!N^+$ tal que si $n > n_0$ entonces $|x_n - a| < \varepsilon$

Veamos:

Por hipótesis:

P_1 : (x_n) es de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in I\!N^+$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

P_2 : La subsucesión $(x_{n_k}) \to a$, por lo tanto, dado ε existe $m = n_k \in I\!N^+$ tal que $n_1 > n_0 \Rightarrow |x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Por $P_1 \wedge P_2$ podemos elegir $n \geq m = n_k > n_0$

Luego, si $n > n_0$ tendremos:
$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1} - a|$$
$$\leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lo cual prueba que: $\text{Lim}\, x_n = a$.

TEOREMA 9 Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.

Demostración:

La demostración se apoya en la definición de sucesión de Cauchy y en el lema 1.

Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones:
Una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

Leer el libro: Análisis Matemático de una variable, Robert G. Bartle.

EJERCICIOS Sección 2.10

BLOQUE I

En cada uno de los siguientes problemas hallar n_0 en función de ε.

01. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=0$

02. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{3}$

03. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=1$

04. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=5$

05. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}=\frac{3}{2}$

06. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+5}}\right)=0$

07. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right)=0$

08. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+na}\right)=0\,,\ a>0$

09. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{4^n}=0$

10. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{2n^2-1}=\frac{1}{2}$

11. Si $\lim\limits_{n\to 0} x_n=\ell$ probar que $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|\ell|$. ¿Lo recíproco es verdadero?

12. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Para cada n se define

$y_n=\min\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$.

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$

13. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ell \wedge \lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$

probar que: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$

14. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{a}=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n=a\,,\ a\neq 0$.

15. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=b$,

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n=\frac{a}{b}\,,\ b\neq 0$.

Sugerencias:

1. Aplicar la propiedad Arquimediana: $a<bn\,,\ \forall\, a,b\in I\!R^+\,,\ \forall\, n\in I\!N^+$. Caso particular: $a=1,\ b=\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon\,,\ \forall\, n\in I\!N^+$.

2. Aplicar $(1+a)^n\geq 1+na\,,\ \forall\, n\in I\!N$

3. Para acotar, aplicar por ejemplo: $n<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$ u otras formas de acotación.

4. Definición: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \iff (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\, n_0\in I\!N^+)\,.\ n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$.

BLOQUE II

Determinar si es convergente o divergente cada sucesión. Si es convergente, hallar el límite de $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(s_n)_{n\geq 1}$, respectivamente.

01. $x_n = \frac{2n+1}{n}$

02. $x_n = \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 2}$

03. $x_n = n^{-\frac{3}{2}}$

04. $x_n = (-1)^n \left(\frac{2n}{n+1} \right)$

05. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$

06. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

07. $x_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

08. $x_n = \frac{n}{2^{n+2}}$

09. $x_n = \frac{(n-2)!}{n!}$

10. $x_n = \frac{n^P}{e^n}$, $P > 0$

11. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

12. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (0.9)^k$

13. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

14. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

15. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k$

16. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$

17. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

18. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}$

19. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

20. $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

<u>Sugerencias:</u>

1) En las sucesiones geométricas, aplicar la fórmula de la suma:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

2) Los términos de la forma: $\frac{1}{(n-a)(n+b)}$ separar en fracciones reales y aplicada la propiedad telescópica $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1$.

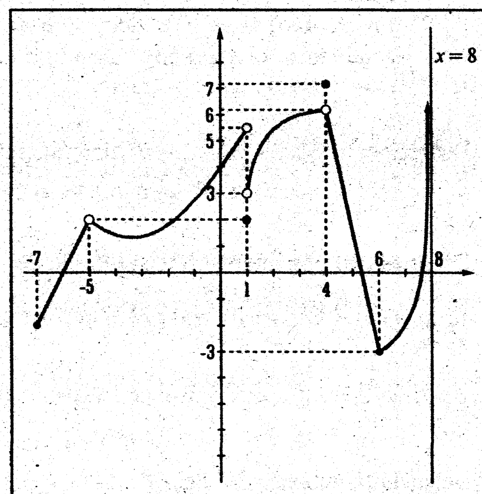
CAPÍTULO 3

LÍMITES DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

3.0 ILUSTRACIÓN GRÁFICA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Sea la función $f:[-7,8[\,\to I\!R$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+12 & , \; -7\le x<-5 \\ \frac{1}{4}(x+3)^2+1 & , \; -5<x<1 \\ 2 & , \; x=1 \\ 3+\sqrt{-x^2+8x-7} & , \; 1<x<4 \\ 7 & , \; x=4 \\ -\frac{9}{2}x+24 & , \; 4<x\le 6 \\ \frac{7x-54}{2(8-x)} & , \; 6<x<8 \end{cases}$$



En la gráfica de la función $f(x)$ apreciamos:

a) El límite por la izquierda de −5 es 2 ($\lim_{x\to -5^-} f(x)=2$)

b) El límite por la derecha de −5 es 2 ($\lim_{x\to -5^+} f(x)=2$)

c) El límite de $f(x)$ en $x=-5$ es 2 ($\lim_{x\to -5} f(x)=2$)

d) El límite por la izquierda 1 es 5 ($\lim_{x\to 1^-} f(x)=5$)

e) El límite por la derecha de 1 es 3 ($\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$)

f) No existe límite en $x=1$

g) El límite de $f(x)$ en $x=4$ es 6 ($\lim_{x\to 4} f(x)=6$)

h) El límite por la izquierda de 8 es $+\infty$ (esto es, no existe límite por la izquierda de 8)

3.1 EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Cuando se estudia los límites en una función real de variable real, el lector debe tener en cuenta lo siguiente:

1° Cuando se trata de calcular límites –que es un valor numérico– el estudiante deberá usar correctamente el **ÁLGEBRA ELEMENTAL** y la **TRIGONOMETRÍA**, sobre todo lo concerniente a las factorizaciones, las racionalizaciones y las identidades trigonométricas.

2° En cambio, si se pide demostrar la existencia del límite de una función, entonces acudiremos al **ANÁLISIS**, usando las definiciones y teoremas correctamente.

Definición: Sea $f: A \longrightarrow I\!R$ una función con valores reales definidos en $A \subset I\!R$.
Sea $x_0 \in I\!R$ un punto de acumulación de A.

Diremos que el número "L" es el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia x_0, y escribiremos

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, si para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar

$\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición Simbólica: Sea $f: A \longrightarrow I\!R$, $A \subset I\!R, x_0$ es punto de acumulación de A.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) \text{ tal que:}$$

$$\text{Si } x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Aclaraciones para el uso de esta definición:

1) Las letras griegas **EPSILÓN**: (ε) y **DELTA**: (δ) representan números reales pequeños positivos que se acercan al cero:

   Por lo general se escoge $0 < \delta < 1$ y "ε" se expresa en función de "δ"

2) Las desigualdades $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|x - x_0| < \delta$ son las vecindades de L y x_0, respectivamente, por tanto son intervalos abiertos.

   Por la propiedad: $|a| < b \iff -b < a < b$, si $b > 0$ tenemos:

i) $|f(x)-L|<\varepsilon \iff -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$
$\iff L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$
$\iff f(x)\in\langle L-\varepsilon,L+\varepsilon\rangle$

ii) $|x-x_0|<\delta \iff -\delta<x-x_0<\delta$
$\iff x_0-\delta<x<x_0+\delta$
$\iff x\in\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle$

3) El intervalo $\langle L-\varepsilon,L+\varepsilon\rangle$ se llama **VECINDAD** o entorno de L, de centro en L y radio $\varepsilon>0$.

El intervalo $\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle$ se llama **VECINDAD** (o entorno) de x_0, de centro en x_0 y radio $\delta>0$.

Afirmar que: $x\in A\wedge 0<|x-x_0|<\delta \iff x\in V_\delta=(A-\{x_0\})\cap\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle$
$=\{x\in A, 0<|x-x_0|<\delta\}$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, significa que para todo intervalo abierto $\langle L-\varepsilon,L+\varepsilon\rangle$, existe un intervalo abierto $\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle$ tal que, poniéndose:

$$V_\delta=\{x\in A, 0<|x-x_0|<\delta\}$$

implica $f(V_\delta)\subset\langle L-\varepsilon,L+\varepsilon\rangle$.

4) En consecuencia si volvemos a fijarnos en la definición de **LIMITE**, tendremos la siguiente deducción:

Afirmar que: $x\in A \wedge 0<|x-x_0|<\varepsilon$ implica $|f(x)-L|<\varepsilon$

Es equivalente a decir: Si $x\in A\cap\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle \Rightarrow f(x)\in\langle L-\varepsilon,L+\varepsilon\rangle$

5) $x_0\notin A$ (a veces $x_0\in A$). Es decir, no se exige que x_0 sea elemento de dominio de *f*.

6) Según la definición de límite, sólo tiene sentido escribir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ cuando x_0 es punto de acumulación de *A*.

7) $f(x)$ se acerca a $L\in\mathbb{R}$ cuando x se acerca a x_0.

8) Para los efectos de los ejercicios prácticos, deberá recordarse las siguientes definiciones:

Definición 1.- Sea la función $f: I \to I\!R$, donde I = Dominio de f.

$f(I)$ = Rango de f

Se dice que la función f **ESTÁ ACOTADO SUPERIORMENTE SOBRE EL CONJUNTO** A, $A \subseteq I$, si existe un número $c \in I\!R$, tal que:

$f(x) \leq c$	$\forall\, x \in A, A \subseteq I$

c — Se llama cota superior de f sobre A.

Definición 2.- Sea la función $f: I \to I\!R$. donde I = Dominio de f

$f(I)$ = Rango de f

Diremos que la función f **ESTÁ ACOTADO INFERIORMENTE SOBRE EL CONJUNTO** A, $A \subseteq I$, si existe un número $k \in I\!R$, tal que:

$f(x) \geq k$	$\forall\, x \in A,\ A \subseteq I$

k — Se llama cota inferior de f sobre B.

Definición 3.- Sea la función $f: I \to I\!R$, donde I = Dominio de f

$f(I)$ = Rango de f

Diremos que la función $f(x)$ **ESTÁ ACOTADO**, en el conjunto A, $A \subseteq I$ si $f(x)$ tiene cota **SUPERIOR E INFERIOR**. Es decir existen dos números reales c y k tal que $k \in f(x) \leq c$, $\forall\, x \in A$

Otra definición equivalente es: $f(x)$ **ESTÁ ACOTADO** en A, si existe un número real positivo M tal que:

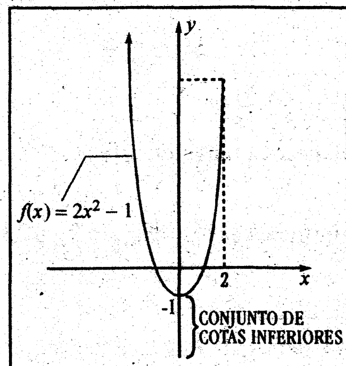
$\lvert f(x) \rvert \leq M$	$\forall\, x \in A$

M — Se llama **COTA**

Proposición: $k \leq f(x) \leq c$, $\forall\, x \in A$ implica $\lvert f(x) \rvert \leq M$; donde $M = \text{máx}\{\lvert k \rvert, \lvert c \rvert\}$

Ejemplos:

1) Sea la función $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \langle -\infty, 2 \rangle$ = Dominio de f.



En el gráfico podemos apreciar lo siguiente:

i) $f(x) = 2x^2 - 1$, no está acotado superiormente para todo $x \in \langle -\infty, 2 \rangle$.

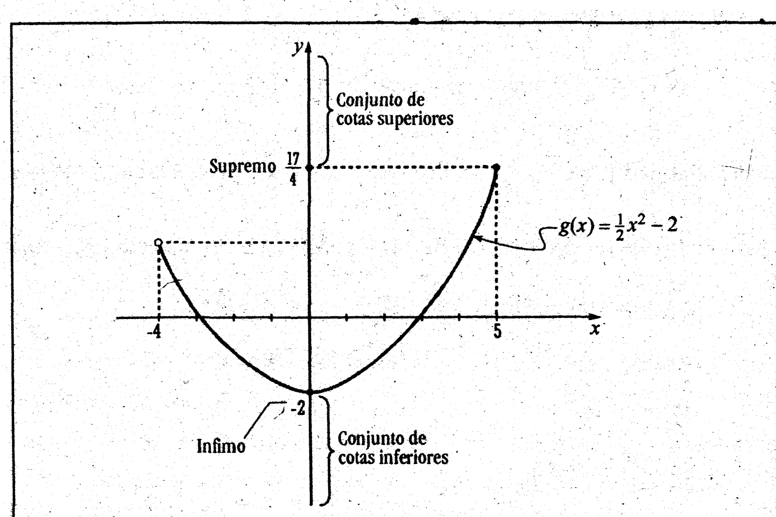
ii). $f(x) = 2x^2 - 1$, está acotado inferiormente para todo $x \in \langle -\infty, 2 \rangle$, por lo tanto tiene ínfimo.

a) El ínfimo de f es "−1", porque: $-1 \leq f(x)$, $\forall\, x \in \langle -\infty, 2 \rangle$.

b) Además, el mínimo de $f(x)$ es "−1", porque −1 pertenece al rango de f. $\text{Rang}(f) = [-1, +\infty\rangle$.

<u>Aclaración</u>: El ínfimo es el mayor de las cotas inferiores. Si el ínfimo pertenece al rango de la función, entonces dicho ínfimo es el mínimo

2) Sea la función: $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$, $x \in\,]-4, 5]$



En el gráfico podemos apreciar lo siguiente:

i) La función $g(x)=\frac{1}{4}x^2-2$ está acotado inferiormente para todo $x\in\,]-4,5]$, por lo tanto, tiene ínfimo.

El ínfimo es "–2", pues: $\boxed{-2\le g(x) \quad \forall\, x\in\,]-4,5]}$

Además: mínimo de $g(x)$ es –2, porque –2 pertenece al rango de $g(x)$.

ii) La función $g(x)=\frac{1}{4}x^2-2$ está acotado superiormente para todo $x\in\,]-4,5]$, por lo tanto, tiene supremo.

El supremo es $\frac{17}{4}$, pues: $\boxed{\frac{17}{4}\ge g(x) \quad \forall\, x\in\,]-4,5]}$

Además: máximo de $g(x)$ es $\frac{17}{4}$ porque $\frac{17}{4}$ pertenece al rango de $g(x)$.

Rango(g) $=y\in\left[-2,\frac{17}{4}\right]$

<u>Aclaración</u>: El supremo es la menor de las cotas superiores. Si el supremo pertenece al rango de la función, entonces dicho supremo es el máximo.

iii) Como $g(x)$ está acotado superior e inferiormente, podemos escribir así;

$$-2\le g(x)\le\frac{17}{4}\quad \forall\, x\in\,]-4,5]$$

$$\Rightarrow\quad |g(x)|\le\frac{17}{4}\ ,\ \text{donde } \frac{17}{4}=\text{máx}\left\{|-2|,\left|\frac{17}{4}\right|\right\}$$

La desigualdad $|g(x)|\le\frac{17}{4}$, indica que la función $g(x)$ está acotado por $\frac{17}{4}$.

9) Para los efectos de la **ACOTACIÓN DE FUNCIONES** debe conocerse las siguientes propiedades:

Si $b>0$ entonces $|a|<b \iff -b<a<b$

$|a\pm b|\le|a|+|b|$............ Propiedad Triangular

$|ab|=|a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ ,\ b\ne 0$

$|-a| = |a|$

$|a-b| = |b-a|$

$|a^2| = |a|^2 = a^2$

$\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq \frac{1}{a_i}$, $\forall\, a_i > 1$

$a^2 \geq 0, \forall\, a \in I\!R$

10) Finalmente debo decir que, **en los ejercicios prácticos relativos a las demostraciones de la existencia del límite, haré uso con relativa exclusividad de la propiedad** $|a| < b \iff -b < a < b$, si $b > 0$. Esto lo hago **para evitar la confusión que se comete erróneamente cuando no se conocen otras propiedades.**

11) Al aplicar la definición de límite, se trata de demostrar la **existencia de δ en términos de ε**

❐ 3.2 APLICACIONES DE LA DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Demostrar que las proposiciones siguientes se cumplen:

Problema 1 $\lim\limits_{x \to 7} (2x+1) = 15$, $x \in A = \langle -\infty, 7\rangle \cup \langle 7, +\infty\rangle$

<u>Demostración</u>:

1) Por definición de límite, tenemos:

$$\lim_{x \to 7} (2x+1) = 15 \iff (\forall\, \varepsilon > 0), (\exists\, \delta > 0), \text{ si } x \in A \wedge 0 < |x-7| < \delta$$

$$\text{entonces } |(2x+1) - 15| < \varepsilon$$

Búsqueda de δ en función de ε

Usando la hipótesis (la desigualdad) $|x-7| < \delta$, trataré de hallar **UNA COTA** (en función de δ) **DEL TÉRMINO** $|(2x+1)-15|$.

Para tal efecto, partiré del término $|(2x+1)-15|$ la simplificaré (factorizando, racionalizando ó usando identidades trigonométricas –según sea el caso–) **DE MODO QUE APAREZCA EL TÉRMINO** $|x-7|$

Veamos:

2) Pero $|(2x+1)-15|=|2x-14|=|2(x-7)|=|2||x-7|=2|x-7|$

3) Por hipótesis teníamos: $|x-7|<\delta$

4) A partir de $|x-7|<\delta$ formaré el término: $2|x-7|$

Así, si $|x-7|<\delta$

Multiplicado por 2 $\Rightarrow$ $2|x-7|<2\delta$

$$\underbrace{|(2x+1)-15|}_{|f(x)-L|<\varepsilon}<2\delta \longleftarrow COTA$$

5) Escojo $2\delta=\varepsilon \iff \boxed{\delta=\frac{1}{2}\varepsilon}$

Problema 2 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\left(2x-\frac{1}{5}\right)=-\frac{6}{5}$, $x\in A$, $A=\left\langle -1,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle -\frac{1}{3},3\right\rangle$

Demostración:

1) Por definición de límites, se tiene:

$$\operatorname{Lim}_{x\to-\frac{1}{2}}\left(2x-\frac{1}{5}\right)=-\frac{6}{5}\iff(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$$

si $x\in A\ \wedge\ 0<\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\delta$

entonces $\left|\left(2x-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)\right|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2) Partir de: $\left|\left(2x-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)\right|=\left|2x-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}\right|=|2x+1|=\left|2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|$

$$=2\left|x+\frac{1}{2}\right|$$

3) Por hipótesis tenemos que: $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\delta$

4) A partir de $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\delta$ formaré el término $2\left|x+\frac{1}{2}\right|$

5) Así si $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\delta$

$$\Rightarrow \underbrace{2\left|x+\frac{1}{2}\right|}_{\left|\left(2x-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)\right|}<2\delta$$

6) Escojo: $2\delta=\varepsilon \Longleftrightarrow \boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{2}}$

Así habré demostrado que: $\left|\left(2x-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)\right|<\varepsilon$ s.q $0<\left|x+\frac{1}{2}\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{2} \;\wedge\; x\in A$

Problema 3 $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-3x+1)=10,\ x\in A,\ A=[0,3\rangle\cup\langle 3,4]$

<u>Demostración</u>:

Por definición de límites tenemos:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-3x+1)=10 \Longleftrightarrow (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$$

tal que, si $x\in A \wedge 0<|x-3|<\delta$.

Entonces: $|(2x^2-3x+1)-10|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en Función de ε

1) Como hipótesis tenemos: $|x-3|<\delta$

2) Pero: $|(2x^2-3x+1)-10|=|2x^2-3x-9|=|x-3||2x+3|$

En ésta simplificación aparece el término $|x-3|$ que está acotado por δ (Según el paso 1). Lo que me falta acotar es el término $|2x+3|$.

Entonces debo buscar un número real positivo M, tal que: $|2x+3|<M \longleftarrow$ *COTA*

3) Para ello tomemos δ, de tal modo que $\boxed{0<\delta<1}$ ← *COTA*

4) Luego usando el paso (1) y (3) tenemos:

Si $(|x-3|<\delta \ \wedge \ \delta<1)$ entonces $(|x-3|<1)$

(esto, **POR EL AXIOMA DE TRANSITIVIDAD**: Si $a<b \ \wedge \ b<c \Rightarrow a<c$)

5) De: $|x-3|<1$

$\Rightarrow \quad -1<x-3<1$

$\boxed{2<x<4}$ — A parir de esta desigualdad formaré el término $|2x+3|$.

$\Longleftrightarrow \quad 4<2x<8$ (multiplicar por 2)

$\Longleftrightarrow \quad 7<2x+3<11$ (Sumar 3)

$\Rightarrow \quad -11<7<2x+3<11$

$\Rightarrow \quad -11<2x+3+11$

$\Longleftrightarrow \quad \boxed{|2x+3|<11} = M$ .... (6)

7) Multiplico la desigualdad de (1) con la desigualdad de (6):

Así, si:
$$\begin{array}{rl} & |x-3|<\delta \\ \wedge & |2x+3|<11 \\ \hline \Rightarrow & \underbrace{|x-3||2x+3|}_{|2x^2-3x-9|} < \underbrace{11\delta}_{\varepsilon} \end{array}$$

8) Hago $11\delta=\varepsilon \iff \delta=\frac{\varepsilon}{11}$

9) Por el paso (3) tengo que "δ" está acotado por "1" y por el paso (8) tengo que $\delta=\frac{\varepsilon}{11}$

Luego, escojo: $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{11}\right\}$ — Esto significa que debo escoger un δ que sea la mínima cota entre las cotas 1 y $\frac{\varepsilon}{11}$ siendo "ε" arbitrario.

Así, he demostrado que:

Si $x \in A \wedge 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x^2-3x+1)-10| < \varepsilon$ donde $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$.

NOTA DE IMPORTANTE ACLARACIÓN CON RESPECTO A LA DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea $f: A \longrightarrow I\!R$; $A \subset I\!R$, x_0 punto de acumulación de A.

La definición: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)$ tal que

$|f(x)-L| < \varepsilon$ **SIEMPRE QUE** $x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

ES EQUIVALENTE A DECIR QUE:

Si $(x \in A \wedge 0 < |x-x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

Problema 4 $\lim\limits_{x \to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 1$, $x \in A$, $A = [-1,0) \cup (0,2]$

Demostración:

1. Por definición de límite tenemos: $\lim\limits_{x \to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 1 \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon) > 0)$

tal que: $(0 < |x| < \delta \wedge x \in A) \Rightarrow \left(\left|\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-1\right| < \varepsilon\right)$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Parto de: $\left|\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-1\right|$ y la simplifico hasta que aparezca el término $|x|$.

Veamos: $\left|1-\frac{x^2}{2}-1\right| = \left|-\frac{x^2}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right||x^2| = \frac{1}{2}|x|^2$

3. Por hipótesis, tenemos que: $|x| < \delta$

elevo al cuadrado $\Rightarrow$ $|x|^2 < \delta^2$

multiplicado por $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{1}{2}|x|^2}_{\left|\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right|} < \underbrace{\frac{1}{2}\delta^2}_{\varepsilon}$

4. Hacemos: $\frac{1}{2}\delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta^2 = 2\varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{2\varepsilon}$

Así, he demostrado que:

$(|x| < \delta \wedge x \in A) \Rightarrow \left|\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-1\right| < \varepsilon$, donde $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Problema 5 $\lim\limits_{x\to 5}(x^3+x^2-2x)=140$, $x\in A$, $A=\langle 4,5\rangle \cup \langle 5,8\rangle$.

Demostración:

1. Por definición de límite, tenemos que:

$\lim\limits_{x\to 5}(x^3+x^2-2x)=140 \Longleftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)$, tal que:

$$\underbrace{(x\in A \wedge 0<|x-5|<\delta)}_{\text{HIPÓTESIS}} \Rightarrow \underbrace{(|(x^3+x^2-2x)-140|<\varepsilon)}_{\text{TÉSIS}}$$

2. Parto de $|(x^3+x^2-2x)-140|$ y la simplifico hasta que aparezca el término $|x-5|$.

Veamos: $|(x^3+x^2-2x)-140| = |x^3+x^2-2x-140|$

FACTORIZAR POR RUFFINI: $= |x-5||x^2+6x+28|$

3. Por hipótesis tenemos que: $|x-5| < \delta$ .... (3*)

4. Lo que falta es hallar una cota $M>0$, tal que $|x^2+6x+28| < M$

Ahora bien, para hallar M puedo proceder de dos maneras, para ambas maneras, debo recurrir a un **DELTA AUXILIAR** $\delta \le 1$, $\delta_1 > 0$.

Veamos:

5. Si $|x-5| < \delta < 1 = \delta_1 \Rightarrow$ $\boxed{|x-5| < 1}$

1ra. Manera:

$$|x-5|<1$$

$$-1<x-5<1$$

$$4<x<6$$

ELEVO AL CUADRADO $\qquad$ **MULTIPLICAR POR 6**

$$16<x^2<36 \qquad\qquad 24<6x<36$$

Sumar miembro a miembro

$$40<x^2+6x<72$$

Sumar 28:

$$40+28<x^2+6x+28<72+28$$

$$68<x^2+6x+28<100$$

$$\Rightarrow\quad |x^2+6x+28|<100 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5^*)$$

Multiplico (3*) por (5*):

$$\underbrace{|x-5||x^2+6x+28|}_{|(x^3+x^2-2x)-140|} < \underbrace{100\delta}_{\varepsilon}$$

2da. Manera:

Usando la propiedad triangular:

$$|a+b|\le|a|+|b|$$

$$|x^2+6x+28|=|x^2-5x+5x+6x+28|$$

$$=|x(x-5)+11x+28|$$

$$\le|x||x-5|+11|x|+28$$

como $|x-5|<1\Rightarrow\ \le|x|(1)+11|x|+28$

$$=12|x|+28$$

$$=12|x-5+5|+28$$

$$\le12(|x-5|+5)+28$$

$$=12|x-5|+60+28$$

$$\le12(1)+60+28=100$$

Como vemos:

$$|x^2+6x+28|<100=M$$

7. Haciendo $100\delta=\varepsilon\ \Rightarrow\ \boxed{\delta=\frac{1}{100}\varepsilon}$, escogemos $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{100}\right\}$

Así, queda demostrado que:

$$\left(|x-5|<\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{100}\right\}\ \wedge\ x\in A\right)\ \Rightarrow\ (|(x^3+x^2-2x)-140|<\varepsilon)$$

EJERCICIOS Sección 3.1

Usando las definiciones de límite, demostrar que:

01. $\lim_{x\to 4}(x^2-3x+5)=9$ **Rpta.** $\delta_1=1$, $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$

02. $\lim_{x\to -2}(x^2+3x)=-2$ **Rpta.** $\delta_1=1$, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

03. $\lim_{x\to -3}(1-2x-3x^2)=-20$

04. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{1}{3}$

05. $\lim_{x\to x_0}(ax^2+bx+c)=ax_0^2+bx_0+c$

06. $\lim_{x\to 0}(x-1)(x+2)=-2$

07. $\lim_{x\to 0}(x^2-x)=0$

08. $\lim_{x\to -2}(3-x^2)=-1$

09. $\lim_{x\to 1}(1-x-x^2)=-1$

10. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(4x^2-2x+1)=1$

Problema 6 Demostrar que: $\lim_{x\to 0}(1+x)^3=1$, $x\in A$, $A=[-1,0\rangle\cup\langle 0,1]$

Demostración:

1) Por definición de límites, tenemos que: $\lim_{x\to 0}(1+x)^2=1 \iff (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta(\varepsilon)>0)$, tal que, $(|x|<\delta \ \wedge\ x\in A)\Rightarrow(|(1+x)^3-1|<\varepsilon)$

Búsqueda de δ en función de ε

2) Partimos de $|(1+x)^3-1|$ y lo simplifico hasta que aparezca el término $|x|$.

Veamos:
$$|(1+x)^3-1|=|(1+x)-1||(1+x)^2+(1+x)+1|$$
$$=|x||1+2x+x^2+1+x+1|$$
$$=|x||x^2+3x+3|$$

3) Por hipótesis tenemos que $|x|<\delta$ .... (3*)

4) Lo que falta ahora, es hallar una **COTA** $M > 0$, tal que: $|x^2 + 3x + 3| < M$

Para ello, tomemos un δ auxiliar, digamos $\delta_1 = 1$ de tal manera que $0 < \delta < 1 = \delta_1$.

5) Pero, por los pasos (3) y (4) podemos hacer la siguiente deducción:

Si, $(|x| < \delta \ \wedge \ \delta < 1) \Rightarrow |x| < 1$

A partir de $|x| < 1$, podemos acotar el término $(x^2 + 3x + 3)$

Voy a exponer dos maneras de ACOTAR, la primera forma es completando cuadrados y en la segunda forma usaré la propiedad triangular.

<u>Veamos</u>: $|x| < 1$

$-1 < x < 1$

Completando cuadrados en:

$$x^2 + 3x + 3 = x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} + 3$$

$$= \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}$$

Como: $-1 < x < 1$

Sumar $\frac{3}{2}$: $\quad -1 + \frac{3}{2} < x + \frac{3}{2} < 1 + \frac{3}{2}$

$$\tfrac{1}{2} < x + \tfrac{3}{2} < \tfrac{5}{2}$$

Elevar al cuadrado: $\frac{1}{4} < \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$

Sumar $\frac{3}{4}$: $\quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} < \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < \frac{25}{4} + \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \quad 1 < \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} < 7$$

$$\Rightarrow \quad \left|\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right| < 7 = M$$

Aplicando la propiedad triangular en $|x^2 + 3x + 3|$, tenemos:

$$|x^2 + 3x + 3| \leq |x^2| + 3|x| + 3$$

$$\leq |x|^2 + 3|x| + 3$$

Como:

$$|x| < 1 \Rightarrow \leq (1)^2 + 3(1) + 3 = 7$$

Como vemos:

$$|x^2 + 3x + 3| < 7 = M \ \ldots\ldots\ldots \ (5^*)$$

6) Multiplicar las desigualdades (3*) y (5*): $\underbrace{|x|\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{4}\right|}_{|(1+x)^3-1|} < \underbrace{7\delta}_{<\ \varepsilon}$

7) Haciendo $7\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{7}$ y escogiendo $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{7}\right\}$ queda demostrado:

Si $x\in A \wedge 0<|x|<\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{7}\right\} \Rightarrow |(1+x)^3-1|<\varepsilon$

Observación: Cuando se trata de acotar funciones polinómicas, no necesariamente tengo que escoger el delta auxiliar como $\delta_1=\frac{1}{2}$, también puede ser $\delta_1=\frac{1}{3}$ ó $\delta_1=\frac{3}{4}$, etc. pero debe ser un número pequeño. El problema fundamental es poder acotar.

❒ 3.3 LÍMITES DE FUNCIONES QUE CONTIENEN RAÍZ CUADRADA

Cuando se trata de **ACOTAR** funciones con **RAÍZ CUADRADA**, necesariamente se trabaja con el dominio de la función raíz cuadrada.

Ejemplos:

1. El dominio de $y=\sqrt{2x-1}$ es: $2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{1}{2}$

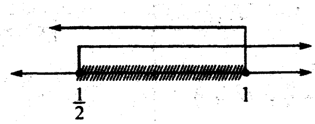
2. El dominio de $y=\sqrt{9-x^2}$ es: $9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$

3. El dominio de $y=\sqrt{1-x}-5\sqrt{2x-1}$ es:

$(1-x\geq 0 \wedge 2x-1\geq 0)$

$x\leq 1 \wedge x\geq\frac{1}{2}$

$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$



Problema 7 Demostrar $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1+x}=0,\ x\in\langle 1,3]=A$

Donde el dominio de $f(x)=\sqrt{1+x}$, es $1+x\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

Demostración:

1. $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{1+x} = 0 \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)$, tal que:

   Si $(0 < x+1 < \delta \ \wedge\ x \in A) \Rightarrow |\sqrt{1+x}| < \varepsilon$.

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de $|\sqrt{1+x}| = \sqrt{1+x}$, puesto que $1+x \geq 0$

   Como vemos, ya apareció el término $(1+x)$ dentro de la **RAÍZ**.

3. Por hipótesis, teníamos: $0 < x+1 < \delta$ extrayendo la raíz cuadrada:

$$0 < \underbrace{\sqrt{x+1}}_{|\sqrt{x+1}|} < \underbrace{\sqrt{\delta}}_{\varepsilon}$$

4. Hacemos: $\sqrt{\delta} = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon^2$

Problema 8 Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 5}(5+\sqrt{5x}) = 10$, $x \in [0,5\rangle \cup \langle 5,\infty\rangle = A$

Demostración:

1. Por definición de límite, debo demostrar que $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, \delta > 0)$ tal que, si:

   $(0 < |x-5| < \delta \ \wedge\ x \in A) \Rightarrow (|5+\sqrt{5x}-10| < \varepsilon)$

2. Partimos de $|5+\sqrt{5x}-10|$, sumo, racionalizo y factorizo hasta obtener el término $|x-5|$.

   Veamos: $|5+\sqrt{5x}-10| = |\sqrt{5x}-5| = 3\left|(\sqrt{5x}-5)\dfrac{(\sqrt{5x}+5)}{(\sqrt{5x}+5)}\right|$

$$= \left|\frac{5x-25}{\sqrt{5x}+5}\right| = \left|5\frac{(x-5)}{\sqrt{5x}+5}\right|$$

$$= 5|x-5|\,\frac{1}{|\sqrt{5x}+5|}$$

3. Por hipótesis ya tenemos que: $|x-5|<\delta$ .... (3*)

Lo que falta, es hallar una cota $M>0$, tal que:

$$\frac{1}{|\sqrt{5x}+5|}=\frac{1}{\sqrt{5x}+5}<M$$

> **Nota:** $|\sqrt{5x}+5|=\sqrt{5x}+5$
>
> Pues $\sqrt{5x}+5>0\,,\ \forall\, x\geq 0$

4. La **ACOTACIÓN** de $\frac{1}{\sqrt{5x}+5}$ se logra a partir del dominio de $f(x)=5+\sqrt{5x}$

Pues: $x\in \text{Dom}(f) \iff 5x\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 0$

$\Rightarrow x\in[0,+\infty\rangle$

En consecuencia, para acotar el término $\frac{1}{\sqrt{5x}+5}$ partiré de $5x\geq 0$.

Tomo raíz cuadrada : $\sqrt{5x}\geq 0$

Sumo 5 : $\sqrt{5x}+5\geq 0+5$

Invierto : $\boxed{\frac{1}{\sqrt{5x}+5}\leq\frac{1}{5}=M}$ .... (4*)

5. Multiplicar las desigualdades (3*) y (4*): $|x-5|\frac{1}{\sqrt{5x}+5}\leq\frac{1}{5}\delta$

Multiplicado por 5: $\underbrace{5|x-5|\frac{1}{\sqrt{5x}+5}}_{|5+\sqrt{5x}-10|}\leq\underbrace{5\frac{\delta}{5}=\delta}_{\varepsilon}$

6. Escogemos $\boxed{\delta=\varepsilon}$

Siguiendo el mismo método, demostrar los siguientes límites del 9 al 12:

Problema 9 $\lim\limits_{x\to 3}(2-\sqrt{3x})=-1$ **Rpta.** $M=\frac{1}{3}\,,\ \delta=\varepsilon$

Problema 10 $\lim\limits_{x\to 2}(2+\sqrt{2x})=4$ **Rpta.** $M=\frac{1}{2}\,,\ \delta=\varepsilon$

Problema 11 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4-x}=2$ **Rpta.** $M=\frac{1}{2}\,,\ \delta=2\varepsilon$

Problema 12 $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}=3$ **Rpta.** $M=\frac{1}{3}$, $\delta=3\varepsilon$

Problema 13 Demostrar que: $\lim_{x\to 1}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}$, $x\in[-2,1\rangle\cup\langle 1,2]$

Demostración:

1. Debo demostrar que $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$, tal que,

   Si: $(0<|x-1|<\delta\ \wedge\ x\in[-2,2]-\{1\})\Rightarrow(|\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}|<\varepsilon)$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de: $|\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}|$, racionalizar y factorizar hasta obtener el termino:

   Veamos:

$$|\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}|=\left|(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3})\frac{(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|\frac{4-x^2-3}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}\right|=\frac{|1-x^2|}{|\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}|}=\frac{|1-x||1+x|}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}$$

$$=|x-1|\,|x+1|\,\frac{1}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}$$

Nota:
$$\begin{cases}|1-x|=|x-1|\\ |\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}|=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\ ,\ \forall\,x\in[-2,2]-\{1\}\end{cases}$$

3. Por hipótesis tenemos que: $|x-1|<\delta$ .... (3*)

4. Lo que falta ahora, es acotar los términos: $|x+1|$ y $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}$

   Es decir, debemos hallar el número M, tal que, $|x+1|\frac{1}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}<M$

Veamos:

PARTIR DEL DOMINIO

$x \in [-2,2]-\{1\}$

Si $x \in [-2,2]$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

Sumar 1: $-1 \leq x+1 \leq 3$

$\Rightarrow |x+1| \leq 3$

Como ...... : $4-x^2 \geq 0$

Extraer raíz : $\sqrt{4-x^2} \geq 0$

Sumar $\sqrt{3}$ ... : $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3} \geq \sqrt{3}$

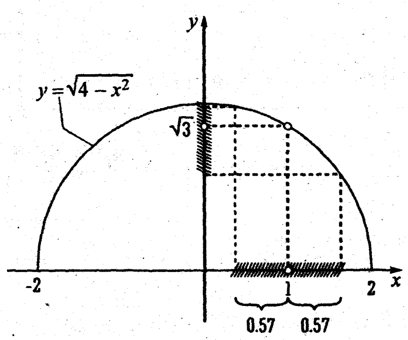
Invertir...... : $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

MULTIPLICAR MIEMBRO A MIEMBRO

$$|x+1|\frac{1}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}} \leq 3\frac{1}{\sqrt{3}} = M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4*)}$$

5. Multiplicar (3*) y (4*): $\underbrace{|x-1||x+1|\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}}_{|\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}|} \leq \underbrace{3\dfrac{1}{\sqrt{3}}\delta}_{\varepsilon}$

6. Hacer $3\dfrac{1}{\sqrt{3}}\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon$, siendo $\varepsilon > 0$ y arbitrario.



Si: $\varepsilon = 1 \Rightarrow \delta = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.57$

OJO: ε debe ser un número muy pequeño; digamos $\varepsilon = 0.01$ ó $\varepsilon = 0.001$ ó quizás más pequeño. Aquí he tomado $\varepsilon = 1$ sólo por comodidad en el gráfico.

Problema 14 Demostrar que: $\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$, $x\in A=[0,4\rangle\cup\langle 4,\infty\rangle$

Demostración:

1. Debo probar que $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$, tal que,

   Si $(0<|x-4|<\delta \ \wedge\ x\in A)\Rightarrow\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de $\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{4}\right|$, para sumar, racionalizar y factorizar, hasta encontrar el término $|x-4|$, luego nos ponemos a acotar.

   Veamos: $$\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{4-\sqrt{x}-2}{4(\sqrt{x}+2)}\right|=\left|\frac{2-\sqrt{x}}{4(\sqrt{x}+2)}\right|=\left|\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{4(\sqrt{x}+2)(2+\sqrt{x})}\right|$$

   $$\left|\frac{4-x}{4(\sqrt{x}+2)^2}\right|=\frac{1}{4}|x-4|\frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

3. Por hipótesis tenemos que: $|x-4|<\delta$ .... (3*)

   Lo que falta, es hallar una cota $M>0$ tal que, $\frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2}<M$

   Para ello partimos de: $x\in[0,\infty\rangle-\{4\}=A$

   $\Rightarrow\ x\geq 0$

   Extraer raíz: $\Rightarrow\ \sqrt{x}\geq 0$

   Sumar 2: $\Rightarrow \sqrt{x}+2\geq 0+2$

   Elevar al cuadrado: $\Rightarrow (\sqrt{x}+2)^2\geq 4$

   Invertir: $\Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2}\leq\frac{1}{4}=M$ ....(3**)

4. Ahora, multiplicamos las desigualdades (3*) y (3**): $|x-4|\frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2}\leq\frac{1}{4}\delta$

Multiplicar por $\frac{1}{4}$: $\underbrace{\frac{1}{4}|x-4|\frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2}}_{\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{4}\right|} \underset{\leq}{\leq} \underbrace{\frac{1}{16}\delta}_{\varepsilon}$

5. Haciendo: $\frac{1}{16}\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=16\varepsilon$, habremos demostrado que si:

$$(0<|x-4|<\delta=16\varepsilon \ \wedge \ x\in A) \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$$

Siendo ε arbitrario muy pequeño.

Por ejemplo $\varepsilon=\frac{1}{512} \Rightarrow \delta=0.03125$

Problema 15 Demostrar que $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$, $x\in A$, $A=\mathbb{R}$.

CASO I Si $a=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0$

Demostración:

1. Debo demostrar que $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$, tal que,

Si $(0<|x|<\delta \ \wedge \ x\in A) \Rightarrow |\sqrt[3]{x}|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de $|\sqrt[3]{x}|$ para encontrar $|x|$

Veamos: $|\sqrt[3]{x}|=\sqrt[3]{|x|}$

3. Por hipótesis tenemos : $|x|<\delta$

EXTRAER RAÍZ CÚBICA : $\underbrace{\sqrt[3]{|x|}}_{|\sqrt[3]{x}|} \underset{<}{<} \underbrace{\sqrt[3]{\delta}}_{\varepsilon}$

4. Haciendo $\sqrt[3]{\delta}=\varepsilon \Rightarrow \delta=\varepsilon^3$, habremos demostrado que:

Si $(0<|x|<\delta=\varepsilon^2 \ \wedge \ x\in\mathbb{R}) \Rightarrow |\sqrt[3]{x}|<\varepsilon$

CASO II Si $a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$

- Demostración:

1. Debo demostrar que $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)$, tal que,

   Si $(0 < |x-a| < \delta \ \wedge\ x \in I\!R) \Rightarrow |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| < \varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. A partir de $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}|$ y racionalizar para encontrar el término $|x-a|$.

   Veamos: $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = \left|(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})\dfrac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})}\right|$

   $$|x-a|\frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}$$

3. Por hipótesis tenemos que $\boxed{|x-a| < \delta}$ .... (3*)

4. Por hallar $M > 0$, tal que: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} < M$

   Pero: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = (x^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}) + (a^{\frac{1}{3}})^2$

   Completando cuadrados: $\underbrace{(x^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}) + \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^2}_{\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^2} \underbrace{- \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^2 + (a^{\frac{1}{3}})^2}_{+\ \frac{3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{4}}$

   Además: $\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}\right)^2 \geq 0$, $\forall\, x \in I\!R$

   Sumar $\frac{3}{4}(a^{\frac{1}{3}})^2$: $\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \frac{3}{4}(a^{\frac{1}{3}})^2 \geq \frac{3}{4}(a^{\frac{1}{3}})^2$

Invertir: $\boxed{\dfrac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\frac{3}{4}(a^{\frac{1}{3}})^2} \leq \dfrac{4}{3(a^{\frac{1}{3}})^2}} = M$ .... (4*)

5. Multiplicar (3*) y (4*): $\underbrace{|x-a|\dfrac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\frac{3}{4}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2}}_{|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}|} \leq \underbrace{\dfrac{4}{3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2}\delta}_{\varepsilon}$

6. Haciendo: $\dfrac{4}{3(a^{\frac{1}{3}})^2}\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\dfrac{3(a^{\frac{1}{3}})^2}{4}\varepsilon$, habremos demostrado que,

si $\left(0<|x-a|<\delta=\frac{3}{4}(a^{\frac{1}{3}})^2\varepsilon \wedge x\in I\!R\right) \Rightarrow |\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}|<\varepsilon$

Problema 16 Demostrar que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, $a>0$, $Df=[0,\infty\rangle-\{a\}$

Demostración:

1. Debo demostrar que $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$, tal que;

Si $(0<|x-a|<\delta \wedge x\in D_f=[0,\infty\rangle-\{a\}) \Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. $\left|\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right|=\left|\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right|=\left|\dfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right|$

$\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right|=\left|\dfrac{2\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{2\sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\right|=\left|\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}\right|$

$\left|\dfrac{a-x}{2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}\right|=\dfrac{1}{2}|x-a|\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}$

3. Por hipótesis tenemos que: $|x-a|<\delta$ .... (3*)

4. Lo que falta ahora, es hallar una COTA $M > 0$, tal que: $\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2} < M$

<u>Veamos</u>:

Partiré del dominio:

Sabemos que : $x \geq 0$, con $x \neq a$, $a > 0$

Extraer la raíz cuadrada : $\sqrt{x} > 0$

Sumar $\sqrt{a}$: $\sqrt{x}+\sqrt{a} \geq \sqrt{a}$

Elevar al cuadrado : $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2 \geq a$

Invertir : $\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2} \leq \frac{1}{a} = M$ .... (4*)

5. Multiplicar las desigualdades de (3*) y (4*): $|x-a|\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2} \leq \frac{1}{a}\delta$

6. Multiplicar por: $\frac{1}{2\sqrt{a}}$:

$$\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{a}}|x-a|\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}}_{\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}-\frac{1}{a\sqrt{a}}\right|} \leq \underbrace{\frac{1}{2a\sqrt{a}}\delta}_{\varepsilon}$$

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}-\frac{1}{a\sqrt{a}}\right| < \varepsilon$$

Haciendo: $\frac{1}{2a\sqrt{a}}\delta = \varepsilon \;\Rightarrow\; \delta = 2a\sqrt{a}\,\varepsilon$ habré demostrar la existencia del límite.

❒ 3.4 LÍMITES DE FUNCIONES RACIONALES

Para la demostración de límites de funciones racionales de la forma: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{x-a} = L$, donde $x = a$ es asíntota vertical, tener cuidado en el momento de **ACOTAR**.

Para ello, deseo hacer algunas breves recomendaciones:

1) El **DELTA** "δ_1" auxiliar que se usa para **ACOTAR**, debe ser menor que la distancia entre los puntos $x = a$ y $x = x_0$. Es decir:

$$\delta_1 < \underbrace{|x_0 - a|}$$

└── DISTANCIA DEL PUNTO $x = x_0$ A LA ASÍNTOTA $x = a$

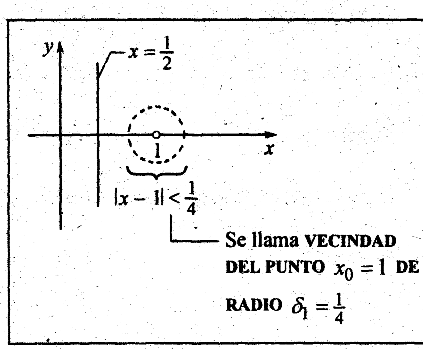
Con esta observación debe quedar claro, que unas veces no es conveniente trabajar con $\delta_1 = 1$, sino con $\delta_1 = \frac{1}{2}$ o quizás con $\delta_1 = \frac{2}{3}$, etc. De preferencia escoger $\delta_1 < \frac{|x_0 - a|}{2}$.

Ejemplos:

1. Si $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}} = -2$, debo escoger $\delta_1 < \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, digamos $\delta_1 = \frac{1}{3}$. De preferencia escoger $\delta_1 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

ASÍNTOTA VERTICAL: $x - \frac{1}{2} = 0$

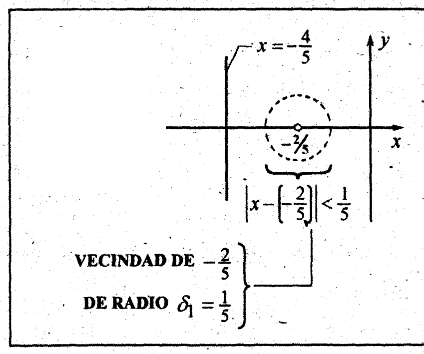
$x = \frac{1}{2}$



2. Si $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{5}} \frac{x+3}{5x+4} = \frac{13}{10}$, debo escoger $\delta_1 < \left|-\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)\right| = \frac{2}{5}$, digamos $\delta_1 = \frac{2}{5}$ que es la mitad de $\left|-\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)\right|$.

ASÍNTOTA VERTICAL: $5x + 4 = 0$

$x = -\frac{4}{5}$



2) Manejar correctamente la propiedad: $|x - x_0| < \delta_1 \iff x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$

Ejemplos:

1. $|x-1| < \frac{1}{4} \iff 1 - \frac{1}{4} < x < 1 + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$

2. $\left|x - \left(-\frac{2}{5}\right)\right| < \frac{1}{5} \iff -\frac{2}{5} - \frac{1}{5} < x < -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

$\frac{-3}{5} < x < \frac{-1}{5}$

3) Si $a<\mu<b \Rightarrow |\mu|<\text{máx}\{|a|,|b|\}$

Veamos 4 ejemplos distintos:

1. Si $-5<2x-3<2 \Rightarrow |2x-3|<5$, porque $5=\text{máx}\{|-5|,|2|\}$

2. Si $-2<5x-2<7 \Rightarrow |5x-2|<7$, porque $7=\text{máx}\{|-2|,|5|\}$

3. Si $-9<2-3x<-4 \Rightarrow |2-3x|<9$, porque $9=\text{máx}\{|-9|,|-4|\}$

4. Si $\frac{1}{2}<x+4<2 \Rightarrow |x+4|<2$, porque $2=\text{máx}\left\{\left|\frac{1}{2}\right|,|2|\right\}$

4) Si $a<\mu<b \Rightarrow \mu^2<k^2$, $k=\text{máx}\{|a|,|b|\}$

Ejemplos:

1. Si $-4<3x+2<3 \Rightarrow (3x+2)^2<4^2$, porque $4=\text{máx}\{|-4|,|3|\}$

2. Si $6<1-2x<8 \Rightarrow (1-2x)^2<8^2$, porque $8=\text{máx}\{|6|,|8|\}$

Importante deducción:

¿Que significa $\delta=\text{mín}\{1,2\varepsilon\}$, siendo ε un número real positivo cualquiera?

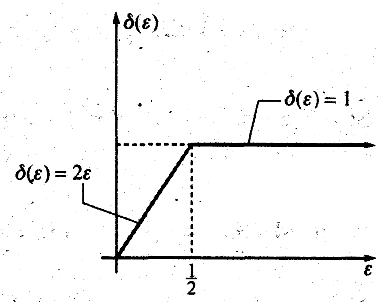
Veamos:

VALORES DE ε $\varepsilon > 0$		VALORES DE δ $\delta = \min\{1, 2\delta\}$
Si $\varepsilon = \frac{1}{5}$	ENTONCES	$\delta = \min\left\{1, 2\left(\frac{1}{5}\right)\right\} = \frac{2}{5}$
Si $\varepsilon = \frac{1}{4}$		$\delta = \min\left\{1, 2\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{1}{2}$
Si $\varepsilon = \frac{1}{3}$		$\delta = \min\left\{1, 2\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{2}{3}$
Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$		$\delta = \min\left\{1, 2\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 1$
Si $\varepsilon = 1$		$\delta = \min\{1, 2(1)\} = 1$
Si $\varepsilon = 2$		$\delta = \min\{1, 2(2)\} = 1$
Si $\varepsilon = 3$		$\delta = \min\{1, 2(3)\} = 1$
Si $\varepsilon = 4$		$\delta = \min\{1, 2(4)\} = 1$

En consecuencia:

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} 1, \text{Si } \varepsilon > \frac{1}{2} \\ 2\varepsilon, \text{Si } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Su gráfico es:



En el gráfico podemos apreciar que ε puede tomar cualquier valor positivo: en cambio δ a lo más toma el valor de 1, puestos que $0 < \delta \leq 1$

Problema 17 $\lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}} = -2, \; x \neq \frac{1}{2}$

Demostración:

1. Por definición de límite, tenemos que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}} = -2 \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0), \text{ tal que:}$$

$$\text{Si } \underbrace{\left(|x-1| < \delta \;\wedge\; x \in D_f = I\!R - \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right)}_{\text{HIPÓTESIS}} \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}} - (-2) < \varepsilon\right|}_{\text{HIPÓTESIS}}$$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de: $\left|\frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}}-(-2)\right|$ y la simplificamos hasta que aparezca el término: $|x-1|$.

   Veamos:

$$\left|\frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}}-(-2)\right|=\left|\frac{2x-3}{\frac{2x-1}{2}}+2\right|=\left|\frac{2(2x-3)}{2x-1}+2\right|=\left|\frac{2(2x-3)+2(2x-1)}{2x-1}\right|=\left|\frac{4x-6+4x-2}{2x-1}\right|$$

$$\left|\frac{8x-8}{2x-1}\right|=\left|\frac{8(x-1)}{2x-1}\right|=8|x-1|\frac{1}{|2x-1|}$$

3. Por hipótesis tenemos que $\underbrace{(x-1)\text{ está acotado por }\delta}_{|x-1|<\delta}$

4. Lo que falta ahora es hallar una cota $M>0$, tal que $\frac{1}{|2x-1|}<M$

   Para ello debemos escoger un δ_1 auxiliar de modo que:

$\delta_1<\left|1-\frac{1}{2}\right|$, digamos $\delta_1=\frac{1}{3}$,

pues $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

Distancia del punto $x_0=1$ a la ASÍNTOTA $x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

De modo que : $|x-1|<\delta\le\delta_1=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ De : $|x-1|<\frac{1}{3}$

obtenemos : $-\frac{1}{3}<x-1<\frac{1}{3}$

$$1-\frac{1}{3}<x<1+\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}}$$

Multiplicar por 2: $\frac{4}{2}<2x<\frac{8}{3}$

Sumar -1 : $\frac{4}{3}-1<2x-1<\frac{8}{3}-1$

$$\frac{1}{3}<2x-1<\frac{5}{3}$$

Invierto : $\frac{3}{5}<\frac{1}{2x-1}<3$

$$\frac{1}{|2x-1|}<3=M$$

porque $3=\text{máx}\left\{\left|\frac{3}{5}\right|,|3|\right\}$

5. Como ya tenemos que : $|x-1|<\delta$ .... Hipótesis.

$\wedge \ \frac{1}{|2x-1|} < \varepsilon$

Multiplicamos : $|x-1|\frac{1}{|2x-1|} < 3\delta$

Multiplicamos por 8 : $\underbrace{8|2x-3|\frac{1}{|2x-1|}}_{\left|\frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}}-(-2)\right|} < \underbrace{24\delta}_{\varepsilon}$

6. Haciendo $24\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{1}{24}\varepsilon$

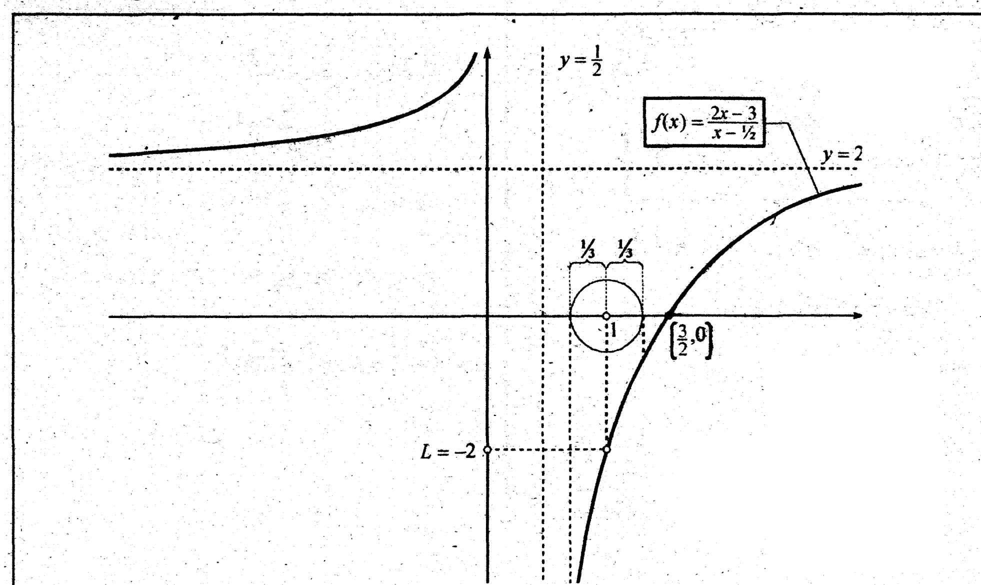
escogemos: $\delta=\min\left\{\underset{\delta_1}{\frac{1}{3}},\frac{\varepsilon}{24}\right\}$

Así quedó demostrado que:

Si $\left(|x-1|<\delta \ \wedge \ x\in D_f=I\!R-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \Rightarrow \left|\frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}}-(-2)\right|<\varepsilon$

$\forall\, \varepsilon>0$ y $\delta=\min\left\{\frac{1}{3},\frac{\varepsilon}{24}\right\}$

Ilustración grafica



Problema 18 Demostrar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\,,\ x\neq-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Demostración:

1. Por definición de límites, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\iff(\forall\,\varepsilon>0)\,(\exists\,\delta_{(\varepsilon)}>0)\text{, tal que:}$$

$$\text{Si }\left(0<|x|<\delta\ \wedge\ x\in D_f=I\!R-\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right)\ \Rightarrow\ \left(\left|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}\right|<\varepsilon\right)$$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Parto de: $\left|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right|$ y lo simplifico hasta que aparezca el término $|x|$.

Veamos: $\left|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}(2x+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(2x+\sqrt{3})}\right|=$

$$\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{6}+2\sqrt{2}x+\sqrt{6}}{\sqrt{3}(2x+\sqrt{3})}\right|=\left|\frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})x}{\sqrt{3}(2x+\sqrt{3})}\right|=\frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{3}}|x|\frac{1}{|2x+\sqrt{3}|}$$

3. Por hipótesis tenemos que el término $|x|$ está acotado por δ, es decir: $|x|<\delta$ … (3*)

4. Por buscar una cota $M>0$, tal que, $\frac{1}{|2x+\sqrt{3}|}<M$

Para ello tomo un "δ_1 Auxiliar", tal que $\delta_1<\left|0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ digamos $\delta_1=\frac{1}{2}\left(\text{puesto que }\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. Por los pasos (3) y (4) podemos hacer la siguiente deducción:

Si $\left(|x|<\delta \ \wedge \ \delta \le \delta_1 = \frac{1}{2}\right)$: $\Rightarrow \ |x|<\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

Multiplicar por 2 : $-1<2x<1$

Sumar $\sqrt{3}$: $-1+\sqrt{3}<2x+\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$

Invertir : $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}<\dfrac{1}{2x+\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

(esto es posible porque los extremos tienen igual signo) : $\dfrac{1}{|2x+\sqrt{3}|}<\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=M$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\text{máx}\left\{\left|\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right|,\left|\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right|\right\}$$

6. Ahora, multipliquemos las desigualdades (3*) y (5*): $|x|\dfrac{1}{|2x+3|}<\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\delta$

7. Multiplicar por $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$: $\underbrace{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})|x|\dfrac{1}{|2x+3|}}_{\left|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|}<\underbrace{\dfrac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{(\sqrt{3}-1)}}_{\varepsilon}$

8. Haciendo: $\dfrac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{(\sqrt{3}-1)}\delta=\varepsilon \ \Rightarrow \ \boxed{\delta=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}\varepsilon}$

Escogemos $\delta = mín\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}\right\}$

Problema 19 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-x-6}{3x^2-8x+4}\right)=\dfrac{7}{4}$, $x\neq 2$, $x\neq\dfrac{2}{3}$

Donde: $f(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{3x^2-8x+4}=\dfrac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(3x-2)}=\dfrac{2x+3}{3x-2}$, $x\neq\dfrac{2}{3}$, $x\neq 2$

Demostración:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{3x^2-8x+4}=\dfrac{7}{4} \iff (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$, tal que,

si $\left(0<|x-2|<\delta \ \wedge \ x\in D_f=I\!R-\left\{2,\frac{2}{3}\right\}\right) \Rightarrow \left(\left|\dfrac{2x+3}{3x-2}-\dfrac{7}{4}\right|<\varepsilon\right)$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de: $\left|\frac{2x+3}{3x-2}-\frac{7}{4}\right|$ y la simplificamos hasta que aparezca el término $|x-2|$.

Veamos: $$\left|\frac{2x+3}{3x-2}-\frac{7}{4}\right|=\left|\frac{4(2x+3)-7(3x-2)}{4(3x-2)}\right|=\left|\frac{8x+12-21x+14}{4(3x-2)}\right|$$

$$\left|\frac{-13x+26}{4(3x-2)}\right|=\left|\frac{-13(x-2)}{4(3x-2)}\right|=\frac{13}{4}|x-2|\frac{1}{|3x-2|}$$

3. Se sabe que $|x-2|<\delta$ .... (3*)

4. Lo que falta ahora, es hallar una cota $M>0$, tal que $\frac{1}{|3x-2|}<M$. Para ello, tomemos una "δ_1 AUXILIAR" tal que $\delta_1<\left|2-\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3}$.

5. Podemos elegir $\delta_1=1$, puesto que $1<\frac{4}{3}$ en consecuencia, de $|x-2|<\delta\leq\delta_1=1$

Deducimos: $|x-2|<1$

$$-1<x-2<1$$

$$1<x<3$$

Multiplicar por 3 : $3<3x<9$

Sumar −2 : $3-2<3x-2<9-2$

$$1<3x-2<7$$

Invertir : $\frac{1}{7}<\frac{1}{3x-2}<1$

Hacer : $\frac{1}{|3x-2|}<1=M$, porque $1=\text{máx}\left\{\left|\frac{1}{7}\right|,|1|\right\}$

Multiplicar las desigualdades (3*) y (5*): $|x-2|\frac{1}{|3x-2|}<\delta$

Multiplicar por $\frac{13}{4}$: $$\underbrace{\frac{13}{4}|x-2|\frac{1}{|3x-2|}}_{\left|\frac{2x+3}{3x-3}-\frac{7}{4}\right|}<\underbrace{\frac{13}{4}\delta}_{\varepsilon}$$

7. Haciendo: $\frac{13}{4}\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{4}{13}\varepsilon$, escogemos $\delta = \min\left\{1, \frac{4}{13}\varepsilon\right\}$

Problema 20 Demostrar que: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2-4} = -\frac{1}{3}$

Demostración:

1. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $\delta > 0$ en función de ε, tal que,

   si $(0 < |x-1| < \delta \wedge x \in D_f = \mathbb{R} - \{2,-2\}) \Rightarrow \left(\left|\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{3}\right| < \varepsilon\right)$

Búsqueda de δ en función de ε

2. $$\left|\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x^2 + x^2 - 4}{3(x^2-4)}\right| = \left|\frac{4x^2-4}{3(x^2-4)}\right| = \left|\frac{4(x^2-1)}{3(x^2-4)}\right| = \frac{4}{3}\frac{|x^2-1|}{|x^2-4|}$$

$$\frac{4}{3}|x-1|\,|x+1|\frac{1}{|x-2|}\frac{1}{|x+2|}$$

3. Según hipótesis, tenemos: $|x-1| < \delta$ .... (3*)

   Para hallar $M > 0$; tal que, $|x+1|\frac{1}{|x-2|}\frac{1}{|x+2|} < M$

   Veamos:

   Escogemos un "δ_1 AUXILIAR", tal que $\delta_1 < mín\{|1-2|, |1-(-2)|\}$ donde:

   $1 = |1-2|$: Es la distancia de $x_0 = 1$ a la ASÍNTOTA $x = 2$

   $3 = |1-(-2)|$: " " " $x_0 = 1$ a la ASÍNTOTA $x = -2$

   Supongamos que elijo $\delta_1 = \frac{1}{2}$, puesto que $\frac{1}{2} < 1$.

   Luego, de $|x-1| < \delta \le \delta_1 = \frac{1}{2}$, deducimos:

$$|x-1| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}}$$

Sumo 1:

$$\frac{1}{2}+1<x+1<\frac{3}{2}+1$$

$$\frac{3}{2}<x+1<\frac{5}{2}$$

ELEGIR

$$\frac{5}{2}=\text{máx}\left\{\left|\frac{3}{2}\right|,\left|\frac{5}{2}\right|\right\}$$

Sumo −2

$$\frac{1}{2}-2<x-2<\frac{3}{2}-2$$

$$-\frac{3}{2}<x-2<-\frac{1}{2}$$

INVERTIR

$$-2<\frac{1}{x-2}<-\frac{2}{3}$$

Sumo 2:

$$\frac{1}{2}+2<x+2<\frac{3}{2}+2$$

$$\frac{5}{2}<x+2<\frac{7}{2}$$

INVERTIR

$$\frac{2}{7}<\frac{1}{x+2}<\frac{2}{5}$$

Hacer:

$$\boxed{|x+1|<\frac{5}{2}} \qquad \boxed{\frac{1}{|x-2|}<2}=\text{máx}\left\{|-2|,\left|-\frac{3}{2}\right|\right\} \qquad \boxed{\frac{1}{|x+2|}<\frac{2}{5}}=\text{máx}\left\{\left|\frac{2}{7}\right|,\left|\frac{2}{5}\right|\right\}$$

MULTIPLICANDO ESTAS 3 DESIGUALDADES Y LA (3*), OBTENEMOS

$$|x+1|\frac{1}{|x-2|}\frac{1}{|x+2|}<\frac{5}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{5}\delta$$

Multiplicar por $\frac{4}{3}$: $\quad \underbrace{\frac{4}{3}|x-1|\frac{1}{|x-2|}\frac{1}{|x+2|}}_{\left|\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{1}{3}\right|} < \underbrace{\frac{4}{3}\cdot 2\delta}_{\varepsilon}$

5. Haciendo $\frac{4}{3}\cdot 2\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{3}{8}\varepsilon$, escogemos: $\delta=\text{mín}\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{8}\varepsilon\right\}$

Problema 21 Demostrar que: $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{5}}\frac{94-15x}{5(5x+2)}=-\frac{53}{4}$, $x\neq-\frac{2}{5}$

Demostración:

1. $(\forall\,\varepsilon>0)$, $(\exists\,\delta>0)$, Si $\left(0<\left|x+\frac{4}{5}\right|<\delta \wedge x\in D_f=I\!R-\left\{-\frac{2}{5}\right\}\right)$

$$\Rightarrow \left|\frac{94-15x}{5(5x+2)}+\frac{53}{5}\right|<\varepsilon$$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partir de $\left|\frac{94-15x}{5(5x+2)}+\frac{53}{5}\right|=\left|\frac{(94-15x)+53(5x+2)}{5(5x+2)}\right|$

$$\left|\frac{94-15x+265x+106}{5(5x+2)}\right|=\left|\frac{250x+200}{5(5x+2)}\right|=\left|\frac{250\left(x+\frac{200}{250}\right)}{5(5x+2)}\right|=50\left|x+\frac{4}{5}\right|\frac{1}{|5x+2|}$$

3. Por hipótesis tenemos que: $\left|x+\frac{4}{5}\right|<\delta$ .... (3*)

4. Lo que falta acotar es el término: $\frac{1}{|5x+2|}$, es decir debemos hallar una cota $M>0$, tal que, $\frac{1}{|5x+2|}<M$.

5. Para ello escogemos un "δ_1 **AUXILIAR**" tal que $\delta_1<\left|-\frac{4}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\right|=\frac{2}{5}$ digamos $\delta_1=\frac{1}{5}$, puesto que $\frac{1}{5}<\frac{2}{5}$.

Por tanto, si $\left|x+\frac{4}{5}\right|<\delta\leq\delta_1=\frac{1}{5}$ deducimos que, $\left|x+\frac{4}{5}\right|<\frac{1}{5}$

$$-\frac{1}{5}<x+\frac{4}{5}<\frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}<x<\frac{1}{5}-\frac{4}{5}$$

$$-1<x<-\frac{3}{5}$$

A partir de esta desigualdad formamos el término: $\frac{1}{5x+2}$

Multiplicar por 5.................................... $-5<5x<-3$

Sumar 2 .... $-5+2<5x+2<-3+2$

$$-3<5x+2<-1$$

Invertir: .... $-1<\frac{1}{5x+2}<-\frac{1}{3}$

(5*) .... $\frac{1}{|5x+2|}<1=M$ pues $1=\text{máx}\left\{|-1|,\left|-\frac{1}{3}\right|\right\}$

6. Multiplicar las desigualdades (3*) y (5*) : $\left|x-\frac{4}{5}\right|\frac{1}{|5x+2|}<\delta$

7. Multiplicar por 50: $\underbrace{50\left|x+\frac{4}{5}\right|\frac{1}{|5x+2|}}_{\left|\frac{94-15x}{5(5x+2)}+\frac{53}{5}\right|} < \underbrace{50\delta}_{\varepsilon}$

8. Haciendo $50\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{1}{50}\varepsilon$, escogemos $\delta=\text{mín}\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{50}\delta\right\}$

Problema 22 Demostrar que $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{4}}\frac{1-x}{1+x}=-9$, $x\neq-1$

Demostración:

1. Por definición de límite, tenemos:

$$\lim_{x\to-\frac{5}{4}}\frac{1-x}{1+x}=-9 \iff (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0) \text{ tal que si}$$

$$\left(\left|x+\frac{5}{4}\right|<\delta \wedge x\in D_f=I\!R-\{-1\}\right) \Rightarrow \left|\frac{1-x}{1+x}+9\right|<\varepsilon$$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partimos de: $\left|\frac{1-x}{1+x}+9\right|=\left|\frac{1-x+9+9x}{1+x}\right|=\left|\frac{8x+10}{1+x}\right|=\left|8\frac{\left(x+\frac{10}{8}\right)}{1+x}\right|$

$$=8\left|x+\frac{5}{4}\right|\frac{1}{|x+1|}$$

3. Por hipótesis tenemos que: $\left|x+\frac{5}{4}\right|<\delta$ .... **(3*)**

4. Lo que falta ahora es hallar una cota $M>0$, tal que $\frac{1}{|x+1|}<M$ para ello, debemos usar la hipótesis $\left|x+\frac{5}{4}\right|<\delta$ y escoger un "δ_1 AUXILIAR" de modo que:

$\left|x+\frac{5}{4}\right|<\delta\leq\delta_1$, donde $\delta_1<\left|-\frac{5}{4}-(-1)\right|=\frac{1}{4}$

Usted puede escoger $\delta_1=\frac{1}{5}$ ó $\delta_1=\frac{1}{6}$ ó $\delta_1=\frac{1}{10}$, etc. como vemos, todos éstos números son menores que $\frac{1}{4}$. De preferencia escoger: $\frac{\frac{1}{4}}{2}$

5. Supongamos que escojo $\delta_1 = \frac{1}{5}$, entonces tendré que:

Si $\left|x+\frac{5}{4}\right| < \delta \le \delta_1 = \frac{1}{5}$, obtengo $\left|x+\frac{5}{4}\right| < \frac{1}{5}$, del cual deduzco:

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{5} < x+\frac{5}{4} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{5}-\frac{5}{4} < x < \frac{1}{5}-\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-4-25}{20} < x < \frac{4-25}{20}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{29}{20} < x < -\frac{21}{20}$$

Sumar 1: $\Rightarrow \quad -\frac{29}{20}+1 < x+1 < -\frac{21}{20}+1$

$$\Rightarrow \quad -\frac{9}{20} < x+1 < -\frac{1}{20}$$

Invertir: $\Rightarrow \quad -20 < \frac{1}{x+1} < -\frac{20}{9}$

Como $20 = \text{máx}\left\{|-20|, \left|-\frac{20}{9}\right|\right\} \Rightarrow \frac{1}{|x+1|} < 20 = M$ .... (5*)

6. Multiplicando las desigualdades (3*) y (5*), obtenemos: $\left|x+\frac{5}{4}\right|\frac{1}{|x+1|} < 20\delta$

Multiplicar por 8: $\underbrace{8\left|x+\frac{5}{4}\right|\frac{1}{|x+1|}}_{|f(x)-L|} < \underbrace{160\delta}_{\varepsilon}$

7. Haciendo $160\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{1}{160}\varepsilon$, escogemos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{160}\varepsilon\right\}$

Siguiendo el mismo método, demostrar que:

Problema 23 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -2$, $x \neq 0$, escoger $\delta_1 < \frac{1}{2}$

Problema 24 $\lim\limits_{x\to \frac{-5}{4}} \frac{x}{x+1} = 5$, $x \neq -1$, escoger $\delta_1 < \frac{1}{4}$.

Problema 25 $\lim\limits_{x\to -1} \frac{182-49x}{8(7x+6)} = -\frac{231}{8}$, $x \neq -\frac{6}{7}$, escoger $\delta_1 < \frac{1}{7}$

Problema 26 $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x}{x^2-4} = -\frac{3}{5}$, $x \neq \pm 2$, escoger $\delta_1 < \frac{1}{2}$.

Problema 27 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{4x-3} = 2$, $x \neq \frac{3}{4}$

Problema 28 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \frac{3x-1}{3x-2} = 0$, $x \neq \frac{2}{3}$

Problema 29 $\lim\limits_{x\to \frac{13}{4}} \frac{x^2}{9-x^2} = -\frac{169}{25}$, $x \neq \pm 3$

Problema 30 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}$, $x \neq 2$, $x \neq 3$

Problema 31 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = -4$, $x \neq 1$, $x \neq 2$

Problema 32 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+3x-2}{6x^2-5x+1} = 5$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{3}$

Problema 33 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{5x^2-4x} = \frac{1}{4}$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{4}{5}$

Problema 34 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2+3x-x^2}{2x^2-5x+3}=-1\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq \frac{3}{2}$

Problema 35 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-5x^2+8x-4}=2\ ,\ x\neq 2\ ,\ x\neq 1$

Problema 36 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{|x|-2}=1$, $x\neq \pm 2$

Problema 37 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-1}{|x-1|}=5$, $x\neq 1$

Problema 38 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{|4x-5|}=1\ ,\ x\neq \pm\frac{5}{4}$

Problema 39 Demostrar que $\lim\limits_{x\to x_0}|x|=|x_0|$

<u>Demostración:</u>

1. Por definición de límite tenemos que:

$$\lim_{x\to x_0}|x|=|x_0| \iff (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)\text{, tal que, si } 0<|x-x_0|<\delta$$

$$\wedge\ x\in I\!R \text{ entonces } \big||x|-|x_0|\big|<\varepsilon$$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Por la propiedad: $\big||a|-|b|\big|\leq|a-b|$, $\forall\ a,b\in I\!R$

   tenemos que: $\big||x|-|x_0|\big|\leq|x-x_0|$

3. Si $(0<\big||x|-|x_0|\big|\leq|x-x_0|\ \wedge\ |x-x_0|<\delta)$, entonces $\big||x|-|x_0|\big|<\delta$

4. Haciendo $\delta=3$, habremos demostrado que:

   Si $(0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon\ \wedge\ x\in I\!R)\ \Rightarrow\ \left(\big||x|-|x_0|\big|<\varepsilon\right)$

Problema 40 Demostrar que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen} x) = 0$

Demostración:

1. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$, tal que, si $\left(0 < \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta \ \wedge \ x \in I\!R\right)$

$$\Rightarrow |1 - \operatorname{sen} x - 0| < \varepsilon$$

Búsqueda de δ en función de ε

2. $|1 - \operatorname{sen} x| = \left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x\right| = \left|2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right|$

$$= 2\left|\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right|$$

3. Pero: $\begin{cases} \left|\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right| < 1 \\ \left|\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right| \le \left|\frac{\frac{x}{2}-x}{2}\right| \end{cases}$

Multiplicar : $\left|\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right| \le \left|\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$

Multiplicar por 2 : $2\left|\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right| \le 2\frac{1}{2}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$

4. Como: $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta$, entonces, $\underbrace{2\left|\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right|}_{|(1-\operatorname{sen} x)-0|} < \underbrace{\delta}_{\varepsilon}$

5. Haciendo $\delta = \varepsilon$, queda demostrado.

Problema 41 Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} (2 - \cos x) = 1$

Demostración:

1. $(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)$, tal que, Si: $(0 < |x| < \delta \;\wedge\; x \in I\!R) \;\Rightarrow\; |(2-\cos x)-1| < \varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. Partir de $|(2-\cos x)-1|$ y transformarlo hasta hallar $|x|$.

   Veamos: $|(2-\cos x)-1| = |1-\cos x| = \left|2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}\right| = 2\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right|^2$

3. Pero: $\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right|$ (ésto, basado en la propiedad $|\text{sen}\,\mu| \leq |\mu|$)

   Elevar al cuadrado : $\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right|^2 \leq \left|\frac{x}{2}\right|^2$

   Multiplicar por 2 : $2\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right|^2 \leq 2\left|\frac{x}{2}\right|^2 \iff 2\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2$ ......(3*)

   Para seguir ACOTANDO, haré uso de la hipótesis:

4. Por hipótesis, tenemos : $|x| < \delta$

   Elevar al cuadrado : $|x|^2 < \delta^2$

   Multiplicar por $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}|x|^2 < \frac{1}{2}\delta^2$ .... (4*)

5. Comparando las desigualdades (3*) y (4*) y por la propiedad de transitividad, obtenemos:

$$\underbrace{2\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right|^2}_{|(2-\cos x)-1|} < \underbrace{\frac{1}{2}\delta^2}_{\varepsilon}$$

6. Haciendo: $\frac{1}{2}\delta^2 = \varepsilon \;\Rightarrow\; \delta^2 = 2\varepsilon$

   $\Rightarrow\; \delta = \sqrt{2\varepsilon}$, queda demostrado el ejercicio.

Problema 42 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0,\ x \neq 0$

Demostración:

2. Partir de : $\left|\frac{1-\cos x}{x} - 0\right|$ y transformarlo hasta hallar $|x|$.

Veamos : $\left|\frac{1-\cos x}{x}\right| = \left|\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x}\right| = \left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|$

3. Pero : $\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right|$ .... (I)

y $\cos\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} < 1 \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right| < 1$ .... (II) $\begin{cases} 1 = \text{máx}\left\{|1|, \left|\cos\frac{x}{2}\right|\right\} \\ \left|\cos\frac{x}{2}\right| \leq 1 \end{cases}$

Esta proposición está demostrada en la pag. xx

4. Multiplicando las desigualdades (I) y (II):

$\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right|$ .... (IV)

5. Por hipótesis, se tiene: $|x| < \delta$

Multiplicar por $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2}\delta$ .... (V)

6. Comparando (IV) y (V) y por la propiedad transitiva, obtengo: $\underbrace{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|}_{|f(x)-L|} < \underbrace{\frac{1}{2}\delta}_{\varepsilon}$

7. Haciendo: $\frac{1}{2}\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = 2\varepsilon$, queda demostrado el problema.

❐ 3.5 PROBLEMAS RELATIVOS A LA FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO.

Definición de la función máximo entero:

$[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n+1,\ \forall\, n \in Z$

Se lee "máximo entero no mayor que x"

Ejemplos numéricos:

1. $[\![2.3]\!]=2$, pues $2\le 2.3<3$
2. $[\![4]\!]=4$, pues $4\le 4<5$
3. $[\![-2.1]\!]=-3$, pues $-3\le -2.1<-2$
4. $[\![-5]\!]=-5$, pues $-5\le -5<-4$

Problema 43 Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[\![x+\frac{1}{5}]\!]}{|5x-1|}=\dfrac{1}{4},\ x\neq\dfrac{1}{5}$

Solución:

En primer lugar, veremos en que intervalo se ***mueve*** la variable x.

Si $x\to 1$ entonces: $[\![x+\frac{1}{5}]\!]$ se hace $[\![1+\frac{1}{5}]\!]=1 \iff 1\le x+\frac{1}{5}<2$

$$\iff \boxed{\frac{4}{5}\le x<\frac{9}{5}}$$

En segundo lugar, definamos el valor absoluto $|5x-1|$, así, tendremos:

$$|5x-1|=\begin{cases}5x-1 & ,\ \text{Si } x\ge\frac{1}{5}\\ -(5x-1) & ,\ \text{Si } x<\frac{1}{5}\end{cases}$$

En consecuencia, la función $f(x)=\dfrac{[\![x+\frac{1}{5}]\!]}{|5x-1|}$ se convierte a la forma $f(x)=\dfrac{1}{5x-1}$ si $\frac{4}{5}\le x<\frac{9}{5}$,

Por tanto, debemos probar que: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{5x-1}=\dfrac{1}{4},\ x\in\left[\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right\rangle$

Demostración:

1. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ tal que si $\left(0<|x-1|<\delta\ \wedge\ x\in\left[\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right\rangle\right)\Rightarrow\left|\dfrac{1}{5x-1}-\dfrac{1}{4}\right|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. $\left|\dfrac{1}{5x-1}-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{4-5x+1}{4(5x-1)}\right|=\left|\dfrac{5-5x}{4(5x-1)}\right|=\left|\dfrac{5(1-x)}{4(5x-1)}\right|=\dfrac{5}{4}\left|\dfrac{1-x}{5x-1}\right|=\dfrac{5}{4}|x-1|\dfrac{1}{|5x-1|}$

3. Por hipótesis tenemos que $|x-1| < \delta$ .... (3*)

4. Por hallarse una cota $M > 0$, tal que, $\frac{1}{|5x-1|} < M$

   La cota M se halla a partir del intervalo $\left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right\rangle$

   Veamos: Como $x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right\rangle \Rightarrow \frac{4}{5} \le x < \frac{9}{5}$

   Multiplicar por 5 : $4 \le 5x < 9$

   Sumar -1 : $3 \le 5x - 1 < 8$

   Invertir : $\frac{1}{8} < \frac{1}{5x-1} \le \frac{1}{3}$

   $\Rightarrow \quad \frac{1}{|5x-1|} \le \frac{1}{3} = M$ .... (4*)

5. Multiplicar las desigualdades (3*) y (4*): $|x-1| \frac{-1}{|5x-1|} \le \frac{1}{3}\delta$

6. Multiplicar por $\frac{5}{4}$: $\underbrace{\frac{5}{4}|x-1|\frac{1}{|5x-1|}}_{\left|\frac{1}{5x-1} - \frac{1}{4}\right|} < \underbrace{\frac{5}{4}\frac{1}{3}\delta}_{\frac{5}{12}\delta}$

7. Hacer: $\frac{5}{12}\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{12}{5}\varepsilon$

Problema 44 Demostrar que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \sqrt{|x| - [\![x]\!]} = \frac{1}{2}$

Demostración:

1. En primer lugar, veremos en qué intervalo se "**mueve**" x **cuando** $x \to \frac{1}{4}$

   Veamos: Si $x \to \frac{1}{4}$ entonces $[\![x]\!]$ se hace:

$$\left[\!\left[\frac{1}{4}\right]\!\right] = 0 \iff \boxed{0 \le x < 1}$$

2. En segundo lugar, definamos el valor absoluto: $|x| = \begin{cases} x \;, & \text{Si } x \ge 0 \\ -x \;, & \text{Si } x < 0 \end{cases}$

3. Por tanto, la función $f(x)=\sqrt{|x|-[\![x]\!]}$ se convierte

en $f(x)=\sqrt{x}\,,\ 0\le x<1$

En consecuencia, el $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{|x|-[\![x]\!]}$ es equivalente a escribir: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\,,\ x\in[0,1\rangle$.

<u>Demostración</u>:

1. Por definición de límite, tenemos: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\iff(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$

Si $\left(0<\left|x-\frac{1}{4}\right|<\delta\ \wedge\ x\in[0,1\rangle\right)\ \Rightarrow\ \left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

Búsqueda de δ en función de ε

2. $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)}\right|=\left|\frac{x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\right|=\left|x-\frac{1}{4}\right|\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right|}$

3. Ya tenemos acotado el término $\left|x-\frac{1}{4}\right|$, pues $\left|x-\frac{1}{4}\right|<\delta$ .... (3*)

4. Debemos acotar el término $\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right|}$, es decir, se debe hallar un número real $M>0$, tal que, $\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right|}<M$.

<u>Veamos</u>: Partiré del intervalo $[0,1\rangle$

Si $\quad x\in[0,1\rangle\ \Rightarrow\ 0\le x<1$

Tomar raíz cuadrada $\quad 0\le\sqrt{x}<1$

Sumar $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}\le\sqrt{x}+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$

Invertir $\quad \frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\le 2=M$

$$\frac{1}{\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|}\le 2\ \text{.................}\quad (4^*)$$

5. Multiplicar las desigualdades (3*) y (4*):
$$\underbrace{\left|x-\frac{1}{4}\right|\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right|}}_{\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|} \le \underbrace{2\delta}_{\varepsilon}$$
$$\le$$

6. Haciendo $2\delta=\varepsilon \;\Rightarrow\; \delta=\frac{1}{2}\varepsilon$, queda demostrado el problema.

Problema 45 Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{4x-\left[\!\left[2x-\frac{1}{3}\right]\!\right]}=\dfrac{4}{3}$

<u>Demostrar:</u>

1. En primer lugar, veamos en qué intervalo se mueve "x" cuando $x\to 1$.

   <u>Veamos</u>: Si $x\to 1$ entonces: $\left[\!\left[2x-\frac{1}{3}\right]\!\right]=\left[\!\left[2(1)-\frac{1}{3}\right]\!\right]=[\![1.66]\!]=1$

$$\Longleftrightarrow \quad 1\le 2x-\frac{1}{3}<2$$
$$1+\frac{1}{3}\le 2x<2+\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{3}\le 2x<\frac{7}{3}$$
$$\frac{4}{6}\le x<\frac{7}{6}$$

2. Como $\left[\!\left[2x-\frac{1}{3}\right]\!\right]=1 \Longleftrightarrow \frac{4}{6}\le x<\frac{7}{6}$, entonces la función $f(x)$, toma la forma:
$$f(x)=\frac{4}{4x-1},\; x\in\left[\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right\rangle$$

3. Debo probar, por tanto que: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{4x-1}=\dfrac{4}{3}$, $x\in\left[\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right\rangle$

   <u>Veamos:</u>

   $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{4x-1}=\dfrac{4}{3} \Longleftrightarrow (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)$ tal que, Si:

$$\left(0<|x-1|<\delta \;\wedge\; x\in\left[\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right\rangle\right) \;\Rightarrow\; 0<\left|\frac{4}{4x-1}-\frac{4}{3}\right|<\varepsilon$$

Búsqueda de δ en función de ε

4. $\left|\frac{4}{4x-1}-\frac{4}{3}\right| = \left|\frac{12-16x+4}{3(4x-1)}\right| = \left|\frac{16-16x}{3(4x-1)}\right| = \left|\frac{16(1-x)}{3(4x-1)}\right| = \frac{16}{3}|x-1|\frac{1}{|4x-1|}$

5. Como $|x-1|<\delta$, me falta hallar una cota $M>0$, tal que: $\frac{1}{|4x-1|}<M$

6. Partiré del intervalo $\left[\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right\rangle$

$$\text{Si } x\in\left[\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right\rangle \Rightarrow \frac{4}{6}\le x<\frac{7}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{16}{6}\le 4x<\frac{28}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{16}{6}-1\le 4x-1<\frac{28}{6}-1$$
$$\Rightarrow \frac{10}{6}\le 4x-1<\frac{22}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{6}{22}<\frac{1}{4x-1}\le\frac{6}{10}\Rightarrow\frac{1}{|4x-1|}\le\frac{6}{10}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6^*)$$

7. Multiplicar (5*) y (6*): $|x-1|\frac{1}{|4x-1|}\le\frac{6}{10}\delta$

8. Multiplicar por $\frac{16}{3}$: $\underbrace{\frac{16}{3}|x-1|\frac{1}{|4x-1|}}_{\left|\frac{4}{4x-1}-\frac{4}{3}\right|}\le\underbrace{\frac{16}{3}\frac{6}{10}\delta}_{\frac{16}{5}\delta}$

9. Haciendo $\frac{16}{5}\delta=\varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{5}{16}\varepsilon}$, $\forall\,\varepsilon>0$ queda probado el límite.

Problema 46 Demostrar que $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2-x}{|x|-[\![x]\!]}=1$

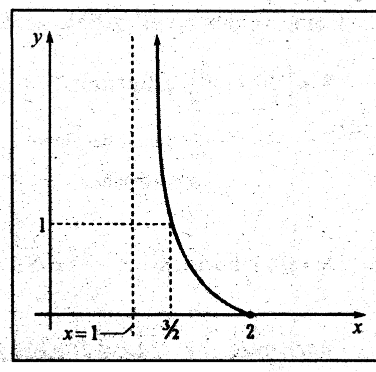
<u>Demostración:</u>

1. En primer lugar, veremos el recorrido de "x".

Si $x\to\frac{3}{2}$, entonces $[\![x]\!]=\left[\!\!\left[\frac{3}{2}\right]\!\!\right]=[\![1.5]\!]=1 \iff 1\le x<2$

2. En consecuencia la función $f(x)=\dfrac{2-x}{|x|-[\![x]\!]}$ se hará de la forma:

$$f(x)=\frac{2-x}{x-1}\text{, siempre que } \underbrace{1\le x<2 \ \wedge \ x\neq 1}_{1<x<2}$$



Ahora todo se reduce a probar que:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2-x}{x-1}=1,\ x\in\langle 1,2\rangle$$

Veamos:

3. Por definición de límite, tenemos:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2-x}{x-1}=1 \ \Rightarrow \ (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)\text{, tal que:}$$

$$\text{Si }\left(0<\left|x-\tfrac{3}{2}\right|<\delta \ \wedge \ x\in\langle 1,2\rangle\right) \Rightarrow \left(0<\left|\frac{2-x}{x-1}-1\right|<\varepsilon\right)$$

Búsqueda de δ en función de ε

4. $$\left|\frac{2-x}{x-1}-1\right|=\left|\frac{2-x-x+1}{x-1}\right|=\left|\frac{-2x+3}{x-1}\right|=\left|\frac{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x-1}\right|=\frac{2}{3}\left|x-\frac{3}{2}\right|\frac{1}{|x-1|}$$

5. Por hipótesis se tiene que $\left|x-\frac{3}{2}\right|<\delta$

6. Por hallarse un número $M>0$, tal que, $\dfrac{1}{|x-1|}<M$

7. Debo partir de $\langle 1,2\rangle$: si $x\in\langle 1,2\rangle$

$\Rightarrow \ 1<x<2$

Sumar -1 : $\Rightarrow \ 0<x-1<1$

Invertir : $\Rightarrow \ 1<\dfrac{1}{x-1}$

Como vemos no es posible acotar. Por lo tanto, escogeremos un " δ_1 AUXILIAR" que sea

$\delta_1 < \left|\frac{3}{2}-1\right| = \frac{1}{2}$, digamos $\delta_1 = \frac{1}{3}$ o $\delta_1 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

Distancia del punto $x_0 = \frac{3}{2}$ a la asíntota $x = 1$.

Es mejor tomar la mitad de la distancia de x_0 a la asíntota.

8. De esta manera, si $\left|x-\frac{3}{2}\right| < \delta \le \delta_1 = \frac{1}{3}$

Obtenemos: $\left|x-\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{3} < x-\frac{3}{2} < \frac{1}{3}$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{6} < x < \frac{11}{6}$$

Sumar -1 .... : $\frac{1}{6} < x-1 < \frac{5}{6}$

$$\frac{6}{5} < \frac{1}{x-1} < 6 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} < 6 \quad \text{...........} \quad (8^*)$$

9. Multiplicar las desigualdades de (5) y (8*): $\left|x-\frac{3}{2}\right|\frac{1}{|x-1|} < 6\delta$

10. Multiplicar por $\frac{2}{3}$: $\underbrace{\frac{2}{3}\left|x-\frac{3}{2}\right|\frac{1}{|x-1|}}_{\left|\frac{2-x}{x-1}-1\right|} < \underbrace{\frac{2}{3}6\delta}_{4\delta}$

11. Haciendo $4\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{1}{4}\varepsilon$, escogemos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\varepsilon\right\}$

3.6 LÍMITES ESPECIALES

1. Probar que $\left[\!\left[\dfrac{(2x+1)}{(x-1)}\right]\!\right]=5$ en un entorno de $x=2$.

Solución:

1. Un entorno de $x=2$, es $|x-2|<\delta$

$$\Longleftrightarrow \quad 2-\delta<x<2+\delta\,,\ \delta>0$$

2. Pero $\dfrac{2x+1}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$

3. En "$2-\delta<x<2+\delta$"

Sumar -1 : $1-\delta<x-1<1+\delta$

Invertir: $\dfrac{1}{1+\delta}<\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{1}{1-\delta}$

Por 3. $\dfrac{3}{1+\delta}<\dfrac{3}{x-1}<\dfrac{3}{1-\delta}$

Sumar 2: $2+\dfrac{3}{1+\delta}<2+\dfrac{3}{x-1}<2+\dfrac{3}{1-\delta}$

Tomar límites cuando $\delta\to 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(2+\frac{3}{1+\delta}\right)<\lim_{\delta\to 0}\left(2+\frac{3}{x-1}\right)<\lim_{\delta\to 0}\left(2+\frac{3}{1-\delta}\right)$$

$$5<\left(2+\frac{3}{x-1}\right)<5$$

$$\Rightarrow\quad \left[\!\left[2+\frac{3}{x-1}\right]\!\right]=5 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{4}<x\le 2$$

Esto por el teorema del "**SANDWICH**" ver página XX.

2. Evaluar: $L=\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2\left[\!\left[\dfrac{(2x+1)}{(x-1)}\right]\!\right]-10x}{x^2-5x+6}$

Solución:

Por el Prob. 1, se sabe: $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\left[\!\left[\frac{(2x+1)}{(x-1)}\right]\!\right]=5$

Luego: $L=\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\frac{5x^2-10x}{x^2-5x+6}$

$$=\lim_{\substack{x<2\\ x\to 2}}\frac{5x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{5(2)}{2-3}=-10$$

3. Evaluar: $\displaystyle\lim_{x\to -3}f(x)$, donde:

$$f(x)=\frac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{x^2-[\![x]\!]}}$$

Solución:

Hallar el límite por la derecha e izquierda de $x=-3$.

A LA DERECHA DE $x=-3$

$x>-3$

$-3<x<-2$ $\qquad$ $x-1>-4$

$\Rightarrow [\![x]\!]=-3$ $\qquad$ $-4<x-1<-3$

$[\![x-1]\!]=-4$

REMPLAZAR EN $f(x)$

$$f(x)=\frac{-4-x}{\sqrt{x^2-(-3)}}$$

Luego: $L^+=\displaystyle\lim_{x\to -3^+}\frac{-4-x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{-4-(-3)}{\sqrt{9+3}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

A LA IZQUIERDA DE $x=-3$

$x<-3$

$-4 \leq x < -3$ $\Rightarrow$ $[\![x]\!] = -4$

Sumar: -1

$x-1<-4$

$\Downarrow$

$-5 \leq x-1 < -4$

$[\![x-1]\!] = -5$

REEMPLAZAR EN $f(x)$

Luego:

$$L^- = \lim_{x\to -3^-} \frac{-5-x}{\sqrt{x^2-(-4)}} = \frac{-5-(-3)}{\sqrt{9+4}} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

4. Hallar: $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x+3x^2)[\![1-x]\!]$

Solución:

Si $x\to 2^+$, entonces $x>2$

$$\Rightarrow \quad -x<-2$$

Sumar 1......... : $1-x<-1$

Acotar por la izquierda con el entero menor que -1:

$$-2 \leq 1-x < -1$$

$$\Rightarrow \quad [\![1-x]\!] = -2$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2^+} (2x+3x^2)[\![1-x]\!] = (2(2)+3(2)^2)(-2)$$

$$=-32$$

5. Evaluar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, para:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x[\![\sqrt{9-x}]\!]^2}{x+2}, & x\geq 1 \\ \dfrac{x+3}{2x+1}, & x\in\langle 0,1\rangle \end{cases}$$

Solución:

a) $$\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}} \frac{x[\![\sqrt{9-x}]\!]^2}{x+2} = \frac{1[\![\sqrt{9-1}]\!]^2}{1+2} = \frac{[\![\sqrt{8}]\!]^2}{3}$$

$$\frac{[\![2.82]\!]^2}{3} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$$

b) $$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{1+3}{2(1)+1} = \frac{4}{3}$$

6. Hallar $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} [\![2x-1]\!][\![2x+1]\!]$

Solución:

a) **LÍMITE A LA DERECHA** $x=\frac{1}{2}$

$x>\frac{1}{2}$

Por 2:	Por 2:
$2x>1$	$2x>1$
Sumar -1:	Sumar 1:
$2x-1>0$	$2x+1>2$
Acotar por la Derecha	Acotar por la derecha
$0<2x-1<1$	$2<2x+1<3$
Aplicar $[\![\ ]\!]$:	Aplicar $[\![\ ]\!]$
$[\![2x-1]\!]=0$	$[\![2x+1]\!]=2$

luego: $$\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}^+\\ x>\frac{1}{2}}} [2x-1][2x+1] = (0)(2) = 0$$

b) LÍMITE A LA IZQUIERDA DE $x = \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}$

$2x < 1$	$2x < 1$
$2x - 1 < 0$	$2x + 1 < 2$
Acotar por izquierda con el menor entero.	Acotar por izquierda con el menor entero.
$-1 \leq 2x - 1 < 0$	$1 \leq 2x + 1 < 2$
$\Rightarrow \llbracket 2x-1 \rrbracket = -1$	$\llbracket 2x+1 \rrbracket = 1$

Luego: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2}^- \\ x < \frac{1}{2}}} [2x-1][2x+1] = (-1)(1) = -1$

7. Evaluar: $L = \lim\limits_{x \to 1} \left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket$

Solución:

a) LÍMITE A LA DERECHA DE 1.

$x > 1$

$x^2 > 1$

$\frac{1}{x^2} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < 1$

Por tanto: $\left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket = 0$

Luego: $L^+ = \lim\limits_{\substack{x \to 1^+ \\ x > 1}} \left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket = 0$

b) LÍMITE A LA IZQUIERDA $x = 1$

$x < 1$

Si $0 < x < 1$ entonces $0 < x^2 < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > 1$

Pero: $1 < \frac{1}{x^2} < 2$, entonces $\left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket = 1$.

Luego: $L^- = \lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x < 1}} \left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket = 1$

❐ 3.7 LÍMITES INDETERMINADOS

Las formas indeterminadas más usuales son: 1) $\frac{0}{0}$ 2) 1^{∞} 3) $\frac{\infty}{\infty}$

otras formas indeterminadas son: $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^{∞}.

1. CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{0}{0}$

Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, Entonces para evitar la indeterminación $\frac{0}{0}$ se harán ciertas operaciones en el numerados y/o el denominador de modo que se pueda simplificar el binomio $(x-a)$.

CASOS QUE SE PRESENTAN:

CASO I Si $P(x)$ y $Q(x)$ son **POLINOMIOS** de grado n y m respectivamente, y $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$, entonces la indeterminación se evita tan solo **FACTORIZANDO** el numerador $P(x)$ y/o el denominador $Q(x)$, de modo que el binomio $(x-a)$ se simplifique así: $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_1(x)}{Q_2(x)}$

CASO II Si $f(x)$ y $g(x)$ son **RADICALES** y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces la indeterminación se evita **RACIONALIZANDO** en numerador y/o denominador.

CASO III Si $f(x)$ y $g(x)$ son **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS,** y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces la indeterminación se evita haciendo uso del teorema $\lim_{\mu\to 0}\frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}=1$ y algunas identidades trigonométricas.

Ejemplos: 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{x}=\lim_{5x\to 0}5\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}=5(1)=5$

2) $\lim_{x\to\pi}\frac{2-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x-\pi}=\frac{0}{0}$

Pero: $L=\lim_{x\to\pi}\frac{2\left(1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}2\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{x-\pi}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\left[2\cos\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}{2}\right]}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{4\cos\frac{(\pi+x)}{4}\operatorname{sen}\frac{(\pi-x)}{4}}{4\,\frac{x-\pi}{-4}\cdot}=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=0$$

CASO I – LÍMITE DE FUNCIONES RACIONALES

1) Calcular:

$$L=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}\quad ,\ x\neq -2$$

Solución:

1° Se sustituye la x por -2

$$L=\frac{(-2)^3+4(-2)^2+4(-2)}{(-2)^2-(-2)-6}=\frac{0}{0}$$

2° Como el límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ y tanto numerador como el denominador son polinomios, entonces deberán ser factorizados para que así pueda ser simplificado el binomio. $x-(-2)=x+2$.

Veamos:

$$L=\lim_{x\to -2}\frac{x(x^2+4x+4)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)^2}{(x-3)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{x-3}=\frac{-2(0)}{-2-3}=\frac{0}{-5}=0$$

2) $L=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$

$x\neq a,\ a>0$ **Sol.** $\frac{3}{2}$

3) $L=\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

$x\neq a,\ a>0$ **Sol.** $\frac{a-1}{3a^2}$

4) $L=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$ **Sol.** $-\frac{3}{2}$

Método de Ruffini para factorizar polinomios:

Si $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$, entonces $x=a$ es raíz de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

Por tanto el valor numérico de:

$$L=\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{P_1(x)}{Q_2(x)}=\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$$

donde $P_1(a)$ y $Q_1(a)$ se obtiene por el método de Ruffini llamado también división sintética.

Veamos:

5) Calcular: $\lim_{x\to -2}\frac{5x^4-3x^2-68}{2x^5-3x^2+2x+80}$

Solución:

El numerador:

−2	5	0	−3	0	−68
		−10	20	−34	68
−2	5	−10	17	−34	0
		−10	40	−114	
	5	−20	57	**−148**	

El denominador:

−2	2	0	0	−3	4	80
		−4	8	−16	38	−80
−2	2	−4	8	−19	40	0
		−4	16	−48	134	
	2	−8	24	−67	**174**	

Por tanto, el límite será: $L = \frac{-148}{174}$

Pues: $P_1(-2) = -148$;
$Q_1(-2) = 174$

Siendo: $P_1(x) = 5x^3 - 10x^2 + 17x - 34$

$Q_1(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 19x + 40$

6) Calcular: $L = \lim\limits_{x \to 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{P+1} - x^P - x + 1}$, $n \in Z^+$, $p \in Z^+$

<u>Solución</u>:

1° Al sustituir x por 1, obtenemos $L = \frac{0}{0}$

2° Levantar la indeterminación:

Factoricemos el numerador y el denominador:

$$\frac{nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1}{x^P(x-1) - (x-1)} = \frac{nx^n(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)(x^P - 1)}$$

$$\frac{nx^n(x-1) - (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)}{(x-1)(x-1)(x^{P-1} + x^{P-2} + \ldots + 1)}$$

$$\frac{(x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1)}{(x-1)(x-1)(x^{P-1} + x^{P-2} + \ldots + 1)}$$

$$\frac{(x-1)(x-1)(nx^{n-1} + (n-1)^{n-2} + \ldots + 1)}{(x-1)(x-1)(x^{P-1} + x^{P-2} + \ldots + 1)}$$

Luego: $$L = \lim_{x \to 1} \frac{nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1}{x^{P-1} + x^{P-2} + \ldots + 1} = \frac{n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1}{1 + 1 + \ldots + 1}$$

$$= \frac{(1+n)\frac{n}{2}}{P} = \frac{(1+n)n}{2P}$$

También se hace por Ruffini:

El numerador:

1	n	$-(n+1)$	$+0$	$+0$	$+\ldots$		0	1
		n	-1	-1			-1	-1
1	n	-1	-1	-1	$\ldots$	-1	-1	0
		n	$n-1$	$n-2$		2	-1	
	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\ldots$	1	0	

La suma de los n primeros números que es: $\dfrac{(1+n)n}{2}$

El denominador:

1	1	-1	0	0	0	$\ldots$	$\ldots$	-1	1
		1	0	0	0			0	-1
1	1	0	0	0	0	$\ldots$	0	-1	0
		1	1	1	1	$\ldots$	1	1	
	1	1	1	1	1	$\ldots$	1	0	

Hay P veces $1 = P$

7) Dada la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, calcular el límite:

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ h\neq 0.$$

<u>Solución</u>:

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{[a(x+h)^2+b(x+h)+c]-[ax^2+bx+c]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax^2+2ahx+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h[2ax+ah+b]}{h}=2ax+b$$

CASO II CÁLCULO DE LÍMITES CON RADICALES

Para levantar la indeterminación de los límites que tienen radicales, es necesario racionalizar:

FACTOR RACIONALIZANTE

El factor recionalizante del binomio: $(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})$ es:

$(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}}\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{A^{n-3}}\sqrt[n]{B^2}+\ldots+\sqrt[n]{B^{n-1}})$ de modo que:

$$A-B=(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}}\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{A^{n-3}}\sqrt[n]{B^2}+\ldots+\sqrt[n]{B^{n-1}})$$

Esta racionalización se cumple para todo $n \in Z^+$, $n \geq 2$. Se basa en la siguiente descomposición de factores:

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Si $n=2$ entonces: $A - B = (\sqrt{A} - \sqrt{B})\,(\sqrt{A} + \sqrt{B})$
Son conjugadas entre sí.

PROBLEMAS:

Problema 1 Calcular: $L = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

Solución:

1° Al sustituir x por 3, obtenemos $\frac{0}{0}$.

2° Levantar la indeterminación: racionalizando el numerador, que se multiplica por su conjugada, y factorizando el denominador.

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6}\right)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x+6}\right)}$$

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{(x-3)(x-1)(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })} = \lim_{x\to 3} \frac{-4x+12}{(\ )(\ )(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })} = \lim_{x\to 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })}$$

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6}\right)} = \frac{-4}{(3-1)\left(\sqrt{9-6+3} + \sqrt{9+6-6}\right)} = -\frac{1}{3}$$

Problema 2 $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x+x^3}$

1° Al sustituir "x" por "0", obtenemos $\frac{0}{0}$

2° Racionalizar el numerador y factorizar el denominador.

Para racionalizar el numerador, en primer lugar, debo convertir a común índice:

m.c.m.$(3,4) = 12$

Luego: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[12]{(1+x^2)^4}-\sqrt[12]{(1-2x)^3}}{x+x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[12]{(1+x^2)^4}-\sqrt[12]{(1-2x)^3}\right)(\text{F.R.})}{(x+x^3)(\text{F.R.})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^4-(1-2x)^3}{x(1+x^2)(\text{F.R.})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)-(1-6x+12x^2-8x^3)}{x(1+x^2)(\text{F.R.})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^7+4x^5+6x^3-8x^2-8x+6)}{x(1+x^2)(\text{F.R.})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^7+4x^5+6x^3-8x^2-8x+6}{(1+x^2)\Big[\underbrace{\sqrt[12]{\left((1+x^2)^4\right)^{11}}+\ldots+\sqrt[12]{\left((1+2x)^3\right)^{11}}}_{\text{hay 12 términos}}\Big]}$$

F.R. = FACTOR RACIONALIZANTE.

$$L=\frac{0+0+0-0-0+6}{(1+0)(1+1+\ldots+1)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Lo que se ha hecho es: $a=\sqrt[12]{(1+x^2)^4}\ \Rightarrow\ a^{12}=(1+x^2)^4$

$b=\sqrt[12]{(1-2x)^3}\ \Rightarrow\ b^{12}=(1-2x)^3$ y que:

$$a^{12}-b^{12}=(a-b)\underbrace{(a^{11}+a^{10}b+a^9b^2+\ldots+b^{11})}_{\text{F.R.}}$$

3 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[5]{2x-1}-2\sqrt[3]{5x-4}+5\sqrt{3x+1}-8x^2-3}{x-1}=\dfrac{0}{0}$

MÉTODO PRÁCTICO PARA CALCULAR ÉSTE TIPO DE LÍMITES

Cuando en el numerador existe la suma de 3 o más términos con radicales, entonces para levantar la indeterminación $\frac{0}{0}$, el quebrado original deberá separarse en ***dos o más quebrados***, cada uno con límite indeterminado, dependiendo esto de ***dos o más ceros que pueden formarse en el numerador.***

Ejemplos: 1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{x-2}=\dfrac{0+0}{0}=\dfrac{0}{0}+\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-4}{x-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1+2\sqrt[3]{x}-2+\sqrt{x}-1-4+1+2+1}{x-1}$

Cuatro ceros en el numerador harán cuatro quebrados, cada uno de los cuales con límite indeterminado:

Así tendremos: $L=\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}}_{L_1}+\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt[3]{x}-2}{x-1}}_{L_2}+\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}}_{L_3}+\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4+4}{x-1}}_{0}$

Finalmente; para hallar L_1, L_2 y L_3 se multiplica cada uno por su factor racionalizante. Igualmente operamos en el problema 3

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt[5]{2x-1}-2\sqrt[3]{5x-4}+5\sqrt{3x+1}-8x^2-3}{x-1}$$

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{3\sqrt[5]{2x-1}-3}^{0}-\overbrace{2\sqrt[3]{5x-4}+2}^{0}+\overbrace{5\sqrt{3x+1}-10}^{0}-\overbrace{8x^2+8}^{0}-\overbrace{3+3-2+10-8}^{0}}{x-1}$$

Como vemos, en el numerador aparecen cinco ceros, lo cual indica que formaremos cinco fracciones cada una de las cuales con límite indeterminado. Como la última fracción resulta cero, entonces sólo nos abocaremos a calcular los cuatro primeros límites:

$$L_1=\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt[5]{2x-1}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[5]{1})\overbrace{\left(\sqrt[5]{(2x-1)^4}+\sqrt[5]{(2x-1)^3}\sqrt[5]{1}+\ldots+\sqrt[5]{1^4}\right)}^{\text{F.R.}}}{(x-1)\left(\sqrt[5]{(2x-1)^4}+\ldots+\sqrt[5]{1^4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(2x-1-1)}{(x-1)\left(\sqrt[5]{(2x-1)^4}+\ldots+\sqrt{14}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3.2(x-1)}{(x-1)\underbrace{\left(\sqrt[5]{(2x-1)^4}+\ldots+\sqrt{1^4}\right)}_{\text{HABRAN CINCO VECES UNO}}}=\frac{6}{1+1+1+1+1}$$

$$L_1=\frac{6}{5}$$

$$L_2=\lim_{x\to 1}\frac{-2\sqrt[3]{5x-4}+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2(\sqrt[3]{5x-4}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2(\sqrt[3]{5x-4}-\sqrt[3]{1})\overbrace{\left(\sqrt[3]{(5x-4)^2}+\ldots+\sqrt[3]{1^2}\right)}^{\text{F.R.}}}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(5x-4)^2}+\ldots+\sqrt[3]{1^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(5x-4-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(5x-4)^2}+\ldots+\sqrt[3]{1^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2.5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(5x-4)^2}+\ldots+\sqrt[3]{1^2}\right)}=\frac{-10}{1+1+1}=-\frac{10}{3}$$

$$L_2=-\frac{10}{3}$$

$$L_3=\lim_{x\to 1}\frac{5\sqrt{3x+1}-10}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5(\sqrt{3x+1}-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{5(3x+1-4)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{5.3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{15}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{15}{2+2}=\frac{15}{4}$$

$$L_3=\frac{15}{4}$$

$$L_4=\lim_{x\to 1}\frac{-8x^2+8}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-8(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-8(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}[-8(x+1)]$$

$$=-8(1+1)=-16$$

$$L_4=-16$$

Conclusión: $L=L_1+L_2+L_3+L_4$

$$=\frac{6}{5}-\frac{10}{3}+\frac{15}{4}-16=-\frac{863}{60}$$

Problema 4 Calcular $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{8+x^3}-\sqrt{4+x^2}}$

<u>Solución</u>:

Podemos hallar el recíproco de L: $K=\dfrac{1}{L}$

$$K=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^3}-\sqrt{4+x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^3}-\sqrt[3]{8}+2-\sqrt{4+x^2}}{x^2}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^3}-\sqrt[3]{8}}{x^2}}_{L_1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x^2}}{x^2}}_{L_2}$$

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+x^3}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{(8+x^3)^2}+\ldots+\sqrt[3]{8^2})}{x^2\underbrace{(\sqrt[3]{(8+x^3)^2}+\ldots+\sqrt[3]{8^2})}_{\text{F.R.}}}=\lim_{x\to 0}\frac{8+x^3-8}{x^2\ \text{F.R.}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{F.R.}}=\frac{0}{12}=0$$

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4+x^2})(2+\sqrt{4+x^2})}{x^2(2+\sqrt{4+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4-x^2}{x^2(2+\sqrt{4+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{4+x^2}}=-\frac{1}{4}$$

Luego: $K=L_1+L_2=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

Problema 5 $\quad L=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+2\sqrt[3]{x}-7}{x-8}$

Solución:

Separar L en dos límites:

$$L=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3+2\sqrt[3]{x}-4+3+4-7}{x-8}=\underbrace{\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}}_{L_1}+\underbrace{\lim_{x\to 8}\frac{2\sqrt[3]{x}-4}{x-8}}_{L_2}$$

$$L_1=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3)}{(x-8)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{7+\sqrt[3]{x}-9}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3)}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2})}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3)(\sqrt[3]{x^2}+\ldots+\sqrt[3]{8^2})}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3)(\sqrt[3]{x^2}+\ldots+\sqrt[3]{8^2})}$$

$$=\frac{1}{(3+3)(4+4+4)}=\frac{1}{72}$$

$$L_1=\frac{1}{72}$$

$$L_2=\lim_{x\to 8}\frac{2(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2^3})(\sqrt[3]{x^2}+\ldots+\sqrt[3]{(2^3)^2})}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+\ldots+\sqrt[3]{(2^3)^2})}=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+\ldots+\sqrt[3]{(2^3)^2})}=\frac{2}{4+4+4}=\frac{2}{12}$$

$$L_2=\frac{1}{6}$$

Luego: $L=L_1+L_2=\frac{1}{72}+\frac{1}{6}=\frac{1+12}{72}=\frac{13}{72}$

Problema 6 Hallar $\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

Solución:

1. Se racionaliza cada factor del numerador multiplicando cada uno por su factor racionalizante:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\ldots(1-\sqrt[n]{x})(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}{(1-x)^{n-1}(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\ldots(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}$$

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-x)\ldots(1-x)}{(1-x)^{n-1}(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\ldots(1+\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\ldots(1+\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-1)n}$$

$$=\frac{1}{n!}$$

Problema 7 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in Z^+$

Solución:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1+1)\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x\sqrt[n]{1+\beta x}}{x(\sqrt[m]{(1+\alpha x)^{m-1}}+\ldots+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{\beta x}{x(\sqrt[n]{(1+\beta x)^{n-1}}+\ldots+1)}$$

$$=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$$

❐ 3.8 LÍMITE DE FUNCIONES CON: Máximo entero, Valor absoluto y signo de x

<u>Introducción</u>: Toda vez que se tenga funciones con máximo entero, con valor absoluto y con signo de x, se deberá aplicar las correspondientes definiciones.

1.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO:

$$k \le \mu(x) < k+1 \iff [\![\mu(x)]\!] = k\,,\; k \in \mathbb{Z}$$

Se lee: Si la función $\mu(x)$ es mayor o igual al número entero k y menor que el entero $k+1$, entonces la función $\mu(x)$ se convierte en el entero k.

Según la definición 1, para que la función $\mu(x)$ se transforme en máximo entero, es necesario que esté acotado inferiormente por el entero k y superiormente por el entero $k+1$:

El cálculo de los límites: $L_+ = \lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ x > x_0}} [\![\mu(x)]\!]$ y $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^- \\ x < x_0}} [\![\mu(x)]\!] = L$ no se hace por simple sustitución numérica de x por x_0 sino, se hace **ACOTANDO** la función $\mu(x)$ en una vecindad de x_0, siempre que $x = x_o$ no sea **ASÍNTOTA VERTICAL** de $\mu(x)$.

Para mayor facilidad en el proceso de **ACOTACIÓN** doy a continuación las propiedades que ayudaran al estudiante a encontrar rápidamente los límites de L_+ y L_- en una vecindad de x_0 siempre que $x = x_0$ no sea **ASÍNTOTA VERTICAL**. Se cumplen:

P1) Si $K \le \mu(x) \Rightarrow [\![\mu(x)]\!] = K$, siempre que $k \in \mathbb{Z}$.

P2) Si $\mu(x) \le m \Rightarrow [\![\mu(x)]\!] = m-1$, siempre que $m \in \mathbb{Z}$.

P3) Si $\frac{a}{b} > 0$. entonces
$$\begin{cases} \text{a) De } \frac{a}{b} \le \mu(x) \Rightarrow [\![\mu(x)]\!] = \left[\!\left[\frac{a}{b} \right]\!\right] \\ \text{b) De } \mu(x) \le \frac{a}{b} \Rightarrow [\![\mu(x)]\!] = \left[\!\left[\frac{a}{b} \right]\!\right] \end{cases}$$

Siendo $\frac{a}{b}$ un número no entero.

P4) Si $\frac{a}{b} < 0$, entonces $\begin{cases} \text{a) } \frac{a}{b} \leq \mu(x) \;\Rightarrow\; \llbracket \mu(x) \rrbracket = -\left\llbracket -\frac{a}{b} \right\rrbracket - 1 \\ \text{b) } \mu(x) \leq \frac{a}{b} \;\Rightarrow\; \llbracket \mu(x) \rrbracket = -\left\llbracket -\frac{a}{b} \right\rrbracket - 1 \end{cases}$. Donde: $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$

P5) $\llbracket n + \mu(x) \rrbracket = n + \llbracket \mu(x) \rrbracket$, si $n \in \mathbb{Z}$.

P6) $\llbracket -x \rrbracket = -\llbracket x \rrbracket - 1$, si x no es entero.

EJEMPLOS

1. Si $3 < -\frac{1}{x+3} \;\Rightarrow\; \left\llbracket -\frac{1}{x+3} \right\rrbracket = 3$ .... (Por P1)
2. Si $5x - 1 < -2 \;\Rightarrow\; \llbracket 5x - 1 \rrbracket = -2 - 1 = 3$ .... (Por P2)
3. Si $1 < \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket = 1$ .... (Por P1)
4. Si $\frac{1}{x^2} < 1 \;\Rightarrow\; \left\llbracket \frac{1}{x^2} \right\rrbracket = 1 - 1 = 0$ .... (Por P2)
5. Si $-2 < 1 - 2x \leq -1 \;\Rightarrow\; \llbracket 1 - 2x \rrbracket = -2 \;\vee\; x = 1$ .... Por definición
6. Si $1 < -\frac{1}{2x-1} \;\Rightarrow\; \left\llbracket -\frac{1}{2x-1} \right\rrbracket = 1$ .... (Por P1)
7. Si $-\frac{5}{3} < \frac{5}{x-4} < -\frac{5}{4} \;\Rightarrow\; \left\llbracket \frac{5}{x-4} \right\rrbracket = -\left\llbracket \frac{5}{3} \right\rrbracket - 1 = -1 - 1 = -2$ ...... (Por P4)
8. Si $\frac{4}{3} < 2x \;\Rightarrow\; \llbracket 2x \rrbracket = \left\llbracket \frac{4}{3} \right\rrbracket = 1$ .... (Por P3)
9. Si $2x < \frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \llbracket 2x \rrbracket = \left\llbracket \frac{4}{3} \right\rrbracket = 1$ .... (Por P3)
10. Si $-2x < -\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \llbracket -2x \rrbracket = -\left\llbracket \frac{4}{3} \right\rrbracket - 1 = -1 - 1 = -2$ .... (Por P4)
11. Si $-\frac{4}{3} < -2x \;\Rightarrow\; \llbracket -2x \rrbracket = -\left\llbracket \frac{4}{3} \right\rrbracket - 1 = -1 - 1 = -2$ .... (Por P4)
12. $\llbracket 2 - x \rrbracket = 2 + \llbracket -x \rrbracket$ .... (Por P5)
13. $\left\llbracket \frac{3x-1}{x-1} \right\rrbracket = \left\llbracket 3 + \frac{2}{x-1} \right\rrbracket = 3 + \left\llbracket \frac{2}{x-1} \right\rrbracket$ .... (Por P5)
14. $\llbracket 2x - 5 \rrbracket = \llbracket 2x \rrbracket - 5$ .... (Por P5)
15. $\llbracket 2x^2 - 3 \rrbracket = \llbracket 2x^2 \rrbracket - 3$ .... (Por P5)

2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

$$|\mu(x)| = \begin{cases} \mu(x) \ , \ \text{si} \ \ \mu(x) \geq 0 \\ -\mu(x) \ , \ \text{si} \ \ \mu(x) < 0 \end{cases}$$

EJEMPLOS

1. Si $x-2<0 \ \Rightarrow \ |x-2| = -(x-2)$
2. Si $2x-3>0 \ \Rightarrow \ |2x-3| = 2x-3$
3. Si $x^2-4 \geq 0 \ \Rightarrow \ |x^2-4| = x^2-4$
4. Si $x^2-4<0 \ \Rightarrow \ |x^2-4| = -(x^2-4)$
5. Si $1-3x<-\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ |1-3x| = -(1-3x)$
6. Si $\frac{x}{x-1}<0 \ \Rightarrow \ \left|\frac{x}{x-1}\right| = -\frac{x}{x-1}$
7. Si $\frac{1}{x}<0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x}$
8. Si $3-2x<0 \ \Rightarrow \ |3-2x| = -(3-2x)$
9. Si $1-\frac{2}{3}x>0 \ \Rightarrow \left|1-\frac{2}{3}x\right| = 1-\frac{2}{3}x$

Estos ejemplos nos dicen que si la función $\mu(x)$ es negativa, entonces su regla de correspondencia, en **VALOR ABSOLUTO**, cambia de signo: $-\mu(x)$.

Pero si la función $\mu(x)$ es positiva entonces, en **VALOR ABSOLUTO** la regla de correspondencia es la misma: $\mu(x)$.

3. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN "SIGNO DE x"

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{Si} \ x>0 \\ 0 \ , \ \text{Si} \ x=0 \\ -1 \ , \ \text{Si} \ x<0 \end{cases}$$

Ejemplos:

1.

$$\operatorname{sgn}(1-2x)=\begin{cases} 1\ , & \text{Si } 1-2x>0 \\ 0\ , & \text{Si } 1-2x=0 \\ -1\ , & \text{Si } 1-2x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1\ , & \text{Si } x<\frac{1}{2} \\ 0\ , & \text{Si } x=\frac{1}{2} \\ -1\ , & \text{Si } x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

2.

$$\operatorname{sgn}(|x-1|-2)=\begin{cases} 1\ , & \text{Si } |x-1|-2>0 \\ 0\ , & \text{Si } |x-1|-2=0 \\ -1\ , & \text{Si } |x-1|-2<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1\ , & \text{Si } x>3 \vee x<-1 \\ 0\ , & \text{Si } x=3 \vee x=-1 \\ -1\ , & \text{Si } -1<x<3 \end{cases}$$

PROBLEMAS:

1. Calcular $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{x-[\![x]\!]}}\ , & -9\le x<-2 \\ \dfrac{[\![3x]\!]-3[\![x]\!]-8\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{x-|x|}\ , & -2\le x<7 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Calcular límite en $x=-2$, implica hallar dos límites:

a) Límite a la derecha de -2,

b) Límite a la izquierda de -2

y comparar si son iguales o no. Si $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}$ diremos que existe límite en $x=-2$ en caso contrario, afirmamos que no existe límite en $x=-2$.

<u>Veamos</u>:

a) En primer lugar, hallemos $\quad L_+=\lim\limits_{\substack{x\to -2^+ \\ x>-2}} f(x)$

$$=\lim_{x\to -2} f_2(x)$$

Analizar si: $\boxed{x>-2}$ en $f_2(x)=\dfrac{[\![3x]\!]-3[\![x]\!]-8\left[\!\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\!\right]}{x-|x|}=\dfrac{-6-3(-2)-8(-1)}{x-(-x)}=\dfrac{8}{2x}$

$3x>-6$, $-6<3x$ $\Downarrow$ $[\![3x]\!]=-6$

$-2<x$ $\Downarrow$ $[\![x]\!]=-2$

$\frac{x}{3}>-\frac{2}{3}$ $\Downarrow$ $\left[\!\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\!\right]=-\left[\!\!\left[\frac{2}{3}\right]\!\!\right]-1$

$=-0-1$

$=-1$

$-2<x$ $\Downarrow$ $|x|=-x$

Luego: $L_+=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8}{2x}=\dfrac{8}{2(-2)}=-2$

b) En segundo lugar, hallemos: $L_-=\lim\limits_{\substack{x\to -2^-\\ x<-2}} f(x)$

$$=\lim_{x\to -2} f_1(x)$$

Analizar: Si $\boxed{x<-2}$ en $f_1(x)=\dfrac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{x-[\![x]\!]}}=\dfrac{-4-x}{\sqrt{x-(-3)}}=\dfrac{-4-x}{\sqrt{x+4}}$

$x-1<-3$ $\Downarrow$ $[\![x-1]\!]=-3-1$

$=-4$

$[\![x]\!]=-2-1$

$=-3$

Luego: $L_-=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-4-x}{\sqrt{x+3}}=\dfrac{-4-(-2)}{\sqrt{-2+3}}$

$=-2$

Conclusión: Como $L_+=-2$ y $L_-=-2$ son iguales, afirmamos que existe límite en $x=-2$. Escribimos: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-2$.

2. Hallar: $L_+ = \lim_{x\to 2^+} \frac{[\![1-x]\!](x^2+2x)(|x-4|-2)}{x^3-x^2-4x+4}$

Solución:

Se analiza el máximo entero y el valor absoluto, a partir de $x>2$, pues $x \longrightarrow 2^+$

$\boxed{x>2}$

$-x<-2$	$x-4>2-4$
$1-x<-1$	$x-4>-2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$[\![1-x]\!]=-1-1$	$\lvert x-4\rvert=-(x-4)$
$=-2$	$=-x+4$

Luego el límite se hace:

$$L_+ = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x^2+2x)(-x+4-2)}{x^3-x^2-4x+4}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2x(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2x}{x-1} = \frac{2(2)}{2-1} = 4$$

$$L_+ = 4$$

3. Calcular: $L_+ = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+1-\left[\!\left[\frac{36-5x}{10}\right]\!\right]\left[\!\left[\frac{36+5x}{10}\right]\!\right]}{6[\![2x-1]\!]-7x-x^2}$

Solución:

Analizar los máximos enteros, a partir de: $x>3$, pues $x \longrightarrow 3^+$

$\boxed{x>3}$

Por -5: $-5x<-15$	Por -5: $-5x>15$	Por 2: $2x>6$
$+36$: $36-5x<21$	$+36$: $36+5x>51$	-1: $2x-1>5$
Por $\frac{1}{10}$: $\frac{36-5x}{10}<\frac{21}{10}$	Por $\frac{1}{10}$: $\frac{36+5x}{10}<\frac{51}{10}$	$5<2x-1$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\left[\!\left[\frac{36-5x}{10}\right]\!\right]=\left[\!\left[\frac{21}{10}\right]\!\right]$	$\left[\!\left[\frac{36+5x}{10}\right]\!\right]=\left[\!\left[\frac{51}{10}\right]\!\right]$	$[\![2x-1]\!]=5$
$=2$	$=5$	

Luego, el límite se convierte en:

$$L_+ = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+1-(2)(5)}{6(5)-7x-x^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{30-7x-x^2} = -\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+10)} = \frac{3+3}{-(3+10)} = -\frac{6}{13}$$

4. Sea $f(x)=[\![x]\!]+[\![4-x]\!]$, ¿existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

<u>Solución</u>:

1) Simplificar: $[\![4-x]\!]=4+[\![-x]\!]$, luego $f(x)=[\![x]\!]+[\![-x]\!]+4$

a) Si: $x\to 3^+ \Downarrow \boxed{x>3}$

$3<x \Downarrow [\![x]\!]=3$

$-x<-3$, $[\![-x]\!]=-3-1=-4$

Luego: $L_+=\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(3-4+4)=3$

b) Si: $x\to 3^- \Downarrow \boxed{x<3}$

De $x<3 \Rightarrow [\![x]\!]=3-1=2$

$-x>-3$, $-3<-x \Rightarrow [\![-x]\!]=-3$

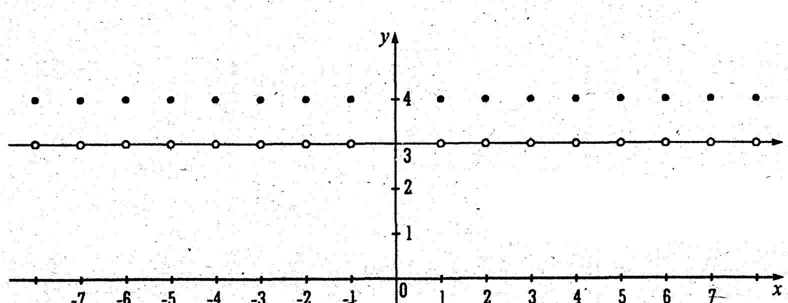
Luego: $L_-=\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(2-3+4)=3$

3) Afirmamos que, sí existe límite en $x=3$, porque los límites laterales son iguales.

Por tanto, escribimos: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$

El gráfico de:

$$f(x)=[\![x]\!]+[\![-x]\!]+4 = \begin{cases} -1+4\ , & \text{Si } x\in\langle K,K+1\rangle \\ 0+4\ , & \text{Si } x\in Z \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3\ , & x\in\langle K,K+1\rangle, K\in Z \\ 4\ , & x\in Z \end{cases}$$



5. Dado: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x[\![\sqrt{9-x}]\!]^2}{x+2} & , \ x\geq 1 \\ \dfrac{x+3}{2x+1} & , \ 0<x<1 \end{cases}$ hallar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución: Hallar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, implica calcular dos límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Veamos:

a) Si $x\to 1^+$ implica $x>1$ y el cálculo se hace en:

$$f_1(x)=\frac{x[\![\sqrt{9-x}]\!]^2}{x+2}$$

Como: $x>1$

$\Rightarrow$ $-x<-1$

$+9$: $9-x<8$

$\sqrt{9-x}<2\sqrt{2}$, Si $9-x\geq 0$

$x\leq 9$

$[\![\sqrt{9-x}]\!]=[\![2\sqrt{2}]\!]$

$=2$

Luego: $f_1(x)=\dfrac{x(2)^2}{x+2}=\dfrac{4x}{x+2}$

$$L_+=\lim_{x\to 1} f_1(x)=\frac{4(1)}{1+2}=\frac{4}{3}$$

b) Si $x\to 1^-$ implica $x<1$ y el cálculo se hace en:

$$f_2(x)=\frac{x+3}{2x+1}$$

Luego: $L_-=\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)=\dfrac{1+3}{2(1)+1}=\dfrac{4}{3}$

Por tanto: $L_+=L_-=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{4}{3}$

6. Analizar: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{[\![x^2]\!]-1}{|x|+1}$

Solución:

a) Si $x \to -1^+$ implica que:

$\boxed{x>-1}$

$-1<x$ ⟶ $\Rightarrow |x| = -x$

$0 \le -x < 1$ ⟶ $x^2 < 1$

$[\![x^2]\!] = 1-1$

$= 0$

Luego: $L_+ = \lim\limits_{x\to -1} \frac{0-1}{-x+1} = \frac{-1}{2}$

$\boxed{L_+ = -\frac{1}{2}}$

b) Si $x \to -1^-$ implica que:

$\boxed{x<-1}$

$-x>1$ ⟶ $x^2>1$

$|x| = -x$

$\Rightarrow [\![x^2]\!] = 1$

Luego: $L_- = \lim\limits_{x\to -1} \frac{1-1}{-x+1} = \frac{0}{2} = 0$

$\boxed{L_- = 0}$

7. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - Sgn(|x^2-1|-1) & , x>\sqrt{2} \\ \frac{1}{5}(x^4 - Sgn(|x^2-1|-1)) & , |x|<\sqrt{2} \\ \sqrt{\sqrt{2}-x} - \sqrt{2\sqrt{2}} & , x<-\sqrt{2} \end{cases}$

Calcular: $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^-} f(x)$

Solución:

1) En primer lugar debo definir la función:

$$Sgn(|x^2-1|-1) = \begin{cases} 1 \ , \text{Si } |x^2-1|-1>0 \\ 0 \ , \text{Si } |x^2-1|-1=0 \\ -1 \ , \text{Si } |x^2-1|-1<0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \ , x>\sqrt{2} \lor x<-\sqrt{2} \\ 0 \ , x=\sqrt{2}, x=0, x=-\sqrt{2} \\ -1 \ , -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, x\neq 0 \end{cases}$$

Donde al resolver:

a)

$|x^2-1|-1>0$

$|x^2-1|>1$

$x^2-1>1 \vee x^2-1<-1$

$x^2>2 \quad \vee \quad \underbrace{x^2<0}_{\varnothing}$

$(x>\sqrt{2} \vee x<-\sqrt{2}) \vee \varnothing$

$\boxed{x>\sqrt{2} \vee x<-\sqrt{2}}$

b)

$|x^2-1|-1=0$

$|x^2-1|=1$

$x^2-1=1 \vee x^2-1=-1$

$x^2=2 \vee x^2=0$

$\boxed{x=\pm\sqrt{2} \vee x=0}$

c)

$|x^2-1|-1<0$

$|x^2-1|<1$

$-1<x^2-1<1$

$0<x^2 \wedge x^2<2$

$R-\{0\} \wedge -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

$\boxed{-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\ ,\ x\neq 0}$

2) Por lo tanto la función $f(x)$ se reduce a:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x>\sqrt{2} \\ \frac{1}{5}(x^4+1) & , \quad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, x\neq 0 \\ \sqrt{\sqrt{2}-x}-\sqrt{2\sqrt{2}} & , \quad x<-\sqrt{2} \end{cases}$$

3) Hallar $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}} f(x)$ implica calcular límites por derecha e izquierda de $-\sqrt{2}$:

a) $$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x)=\lim_{\substack{x>-\sqrt{2}\\ x\to-\sqrt{2}}}\left[\tfrac{1}{5}(x^4+1)\right]=\tfrac{1}{5}((-\sqrt{2})^4+1)$$
$$=1$$

b) $$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x)=\lim_{\substack{x<-\sqrt{2}\\ x\to-\sqrt{2}}}(\sqrt{\sqrt{2}-x}-\sqrt{2\sqrt{2}})$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{2}}$$
$$=0$$

Como $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-}$, decimos que $\nexists \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}} f(x)$

Hallar $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$ implica calcular límites por derecha e izquierda de $\sqrt{2}$:

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x>\sqrt{2}} (x^2-1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x<\sqrt{2}} \left[\frac{1}{5}((\sqrt{2})^4 + 1) \right] = 1$

Como: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)$, afirmamos que existe límite cuando $x\to\sqrt{2}$, luego: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x) = 1$.

8. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} [\![\frac{2}{x}]\!]$ implica hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} [\![\frac{2}{x}]\!] = 0$

$x>2$

$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

$\frac{2}{x} < 1$

$\Rightarrow [\![\frac{2}{x}]\!] = 1-1 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} [\![\frac{2}{x}]\!] = 1$

$x<2$

$\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

$\frac{2}{x} > 1$

$[\![\frac{2}{x}]\!] = 1$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

9. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} [\![\frac{2-3x}{x}]\!]$

Solución:

1) Simplificar: $f(x) = [\![-3 + \frac{2}{x}]\!] = -3 + [\![\frac{2}{x}]\!]$

2) a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x>2} f(x) = -3 + 0 = -3$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x<2} f(x) = -3 + 1 = -2$

Porque los límites laterales existen y son diferentes, afirmamos que no existe límite en $x = 2 \cdot (\nexists \lim\limits_{x\to 2} f)$

10. Dada la función: $f(x)=\left[\!\left[\frac{25-x}{7-x}\right]\!\right]x+4\left[\!\left[\frac{1-x}{x}\right]\!\right]+3[\![x]\!]$

Hallar: a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

<u>Solución</u>:

1) Si dentro de cada **MÁXIMO ENTERO** se puede dividir y el cociente es entero, es preferible efectuar dicha división.

En $f(x)$ se tiene:

a) $\left[\!\left[\frac{25-x}{7-x}\right]\!\right]=\left[\!\left[1-\frac{18}{x-7}\right]\!\right]=1+\left[\!\left[-\frac{18}{x-7}\right]\!\right]$ b) $\left[\!\left[\frac{1-x}{x}\right]\!\right]=\left[\!\left[-1+\frac{1}{x}\right]\!\right]=-1+\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$

2) Luego: $f(x)$ se convierte en $f(x)=\left(1+\left[\!\left[-\frac{18}{x-7}\right]\!\right]\right)x+4\left(-1+\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]\right)+3[\![x]\!]$

3) Ahora hallemos los límites laterales definiendo los máximos enteros:

a) Si $x\to 1^+$, entonces:

$\boxed{x>1}$

- $x-7>-6$; $\frac{1}{x-7}<\frac{1}{-6}$; $\frac{-18}{x-7}>3$ $\Downarrow$ $\left[\!\left[-\frac{18}{x-7}\right]\!\right]=3$
- $\frac{1}{x}<1$; $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]=1-1=0$
- $[\![x]\!]=1$

Luego: $f(x)$ se convierte en:

$$f(x)=(1+3)x+4(-1+0)+3(1)=4x-4+3=4x-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(4x-1)=4(1)-1=3$$

b) Si $x\to 1^-$, entonces:

$\boxed{x<1}$

- $x-7<-6$; $\frac{1}{x-7}>\frac{1}{-6}$; $\frac{-18}{x-7}<\frac{-18}{-6}$; $\frac{-18}{x-7}<3$; $\left[\!\left[\frac{-18}{x-7}\right]\!\right]=3-1=2$
- $\frac{1}{x}>1$; $\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]=1$
- $[\![x]\!]=1-1=0$

Luego: $f(x)$ se convierte en.

$$f(x)=(1+2)x+4(-1+1)+3(0)=3x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}(3x)=3$$

c) Como $L_+ = L_-$, afirmamos que existe $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

11. Sea la función $f(x) = \left[\!\left[\frac{2x+4}{x} \right]\!\right]$, ¿ existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

<u>Solución</u>:

1) Hacemos la división dentro del ***máximo entero***: $\left[\!\left[\frac{2x+4}{x} \right]\!\right] = \left[\!\left[2 + \frac{4}{x} \right]\!\right]$

$$f(x) = 2 + \left[\!\left[\frac{4}{x} \right]\!\right]$$

2) Analizamos el máximos entero: $\left[\!\left[\frac{4}{x} \right]\!\right]$ a la derecha e izquierda de $x = 2$.

a) A la derecha de 2: $x > 2$

$\Downarrow$

Invertir $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

Por 4: $\frac{4}{x} < \frac{4}{2}$

$\frac{4}{x} < 2$

En su entorno $\Rightarrow$ $\left[\!\left[\frac{4}{x} \right]\!\right] = 2 - 1$

$f(x) = 2 + 1 = 3$ $\qquad = 1$

Luego:

$$L_+ = \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f(x) = \lim_{x\to 2} (3) = 3$$

b) A la izquierda de 2: $x < 2$

Si $x > 0$, invertir $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

Por 4: $\frac{4}{x} > 2$

En su entorno: $\left[\!\left[\frac{4}{x} \right]\!\right] = 2$

Por tanto: $f(x) = 2 + 2 = 4$

Luego:

$$L_- = \lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2} (4) = 4$$

3) Afirmamos que no existe límite en $x = 2$, pues $L_+ \neq L_-$

12. Si $A = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+2x+x^2} - \sqrt{4-2x+x^2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$, $B = \lim_{x\to 0} \frac{4}{x}\left(\sqrt{\frac{4-x}{1-x}} - 2 \right)$

Hallar: $\lim_{x\to A+B} \frac{[\![4-x]\!]}{|x-4|}$

Solución:

1. **Cálculo de A**: Racionalizando numerador y denominador:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(4+2x+x^2-(4-2x+x^2))(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x-(1-x))(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{4x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{4(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})}=1$$

2. **Cálculo de B**: Racionalizando el segundo factor:

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}\left(\frac{\frac{4-x}{1-x}-4}{\sqrt{\frac{4-x}{1-x}}+2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}\left(\frac{3x}{(1-x)\left(\sqrt{\frac{4-x}{1-x}}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{12}{(1-x)\left[\sqrt{\frac{4-x}{1-x}}+2\right]}\right)$$

$$=\frac{12}{1(2+2)}=3$$

$$A+B=1+3=4$$

3. Cálculo de $\lim\limits_{x\to 4}\frac{[\![4-x]\!]}{|x-4|}$:

$$L_+=\lim_{\substack{x\to 4^+\\ x>4}}\frac{[\![4-x]\!]}{|x-4|}=\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\frac{-1}{x-4}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

$$L_-=\lim_{\substack{x\to 4^-\\ x<4}}\frac{[\![4-x]\!]}{|x-4|}=\lim_{x\to 4}\frac{0}{-(x-4)}=0$$

Pues para una vecindad de $x=4$, se tiene:

$$f(x)=\frac{[\![4-x]\!]}{|x-4|}=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-4}, & \text{Si } x>4\\[2mm] \dfrac{0}{-(x-4)}, & \text{Si } x<4\end{cases}$$

Afirmamos: a) NO existe L_+ b) Existe $L_-=0$

13. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}([\![2-x]\!]+[\![2+x]\!])$ **Rpta.:** $L=3$, $L_+=L_-$

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[\![1-x]\!]+[\![x+1]\!]}{4-\sqrt{4|x|-[\![x]\!]}}, & -1\le x<3\\[2mm] \dfrac{[\![2-x]\!]+1}{\sqrt{2x-5[\![x-2]\!]}}, & 3\le x<4\end{cases}$ ¿$\exists\lim\limits_{x\to 3}f(x)$? **Rpta.:** $L_-=\dfrac{1}{4+\sqrt{10}}$

$L_+=-1$

15. $\lim\limits_{x\to 2}(⟦x⟧+\sqrt{x-⟦x⟧})$ **Rpta.:** 2

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left⟦\dfrac{3}{x^2+1}\right⟧$ **Rpta.:** 2

17. $f(x)=\begin{cases} |x|-⟦x⟧ \ , & -3\le x<-1 \\ -4x+\text{Sgn}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) \ , & -1\le x<1 \end{cases}$ ¿$\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$? **Rpta.:** $L_+=2$

$L_-=3$

18. Sea:

$$f(x)=\begin{cases} \left⟦\dfrac{4x+4}{4}\right⟧ \ , & 1\le x\le 2 \\ \dfrac{3\sqrt[3]{2x-1}+2\sqrt{5x-4}-5}{x-1} \ , & \dfrac{4}{5}\le x<1 \end{cases}$$

¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$? **Rpta.:** $L_-=7$

$L_+=2$

19. Sea:

$$f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2 \ , & x\ge 1 \\ ⟦x⟧+\sqrt{x-⟦x⟧} \ , & x<1 \end{cases}$$

Hallar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, Graficar $f(x)$

Rpta.: $L=1$

20. Dado: ¿$\exists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$?

$$(x)=\begin{cases} \dfrac{\left⟦\frac{2x+5}{x+3}\right⟧x^2-4}{x+2} \ , & x\in\langle -2,+\infty\rangle \\ -4 \ , & =-2 \\ -2\,\text{Sgn}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)+3x \ , & x\in\langle -3,-2\rangle \end{cases}$$

Rpta.: $L_+=L_-=-4$

21. Calcular: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ **Rpta.:** $\dfrac{\sqrt{2a}}{2a}$

22. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$. **Rpta.:** $\dfrac{5}{6}$

23. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+3x-2}{x-1}$ **Rpta.:** $\frac{7}{3}$

24. Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt[5]{x+1}-2\sqrt{x+1}+4x-1}{x^2+2x}$ **Rpta.:** $\frac{9}{5}$

25. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ **Rpta.:** $\frac{1}{9}$

EJERCICIOS Sección 3.8

I Hallar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-3\sqrt{2x-1}+3x-1}{x-1}$ **Rpta.:** $\frac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ **Rpta.:** $\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$ **Rpta.:** ∞

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ **Rpta.:** -1

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$ **Rpta.:** ∞

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$ **Rpta.:** 0

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbb{Z}^+$ **Rpta.:** $\frac{m}{n}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ **Rpta.:** $\frac{2}{3}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$ **Rpta.:** $\frac{m}{n}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$ **Rpta.:** $\frac{1}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$ **Rpta.:** $-\frac{1}{4}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ **Rpta.:** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$ **Rpta.:** $\frac{n(n+1)}{2}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ **Rpta.:** $2\frac{1}{24}$

15. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ **Rpta.:** $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{6-\sqrt{3x-1}}-\sqrt[3]{6+\sqrt{5x-1}}}{x-1}$ **Rpta.:** $-\frac{7}{24}$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x[\sqrt{6-\sqrt{x+2}}-\sqrt{\sqrt{2x}+2}]}{\sqrt[3]{6-x\sqrt{5x-1}}}$ **Rpta.:** 0

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x-1}}$ **Rpta.:** 0

19. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{h^2+1}+\sqrt{2h^2+1}+h^2-2}{h\sqrt[3]{h+1}-h}$ **Rpta.:** $\frac{33}{5}$

20. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$, $f(1-2x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ **Rpta.:** -2

II Para cada una de las siguientes funciones hallar: $L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

21. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **Rpta.:** $L = 3a^2 + 2bx + c$

22. $f(x) = x^n$, $n \in Z^+$ **Rpta.:** $L = nx^{n-1}$

23. $f(x) = \sqrt[5]{5x-1}$ **Rpta.:** $L = \frac{1}{\sqrt[3]{(5x-1)^4}}$

24. $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{1-4x}$ **Rpta.:** $L = 6x + \frac{4}{\sqrt{1-4x}}$

25. $f(x) = \sqrt[15]{2-30x}$ **Rpta.:** $L = -\frac{2}{\sqrt[15]{(2-30x)^{14}}}$

III Hallar:

26. $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ **Rpta.:** $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

27. $\lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$, Si $f(x) = |x^2 - 16|$ **Rpta.:** 6

28. $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, Si $f(x+2) = \frac{1}{4}x^2$ **Rpta.:** 0

29. $\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}$, Si $f(1-4x) = \sqrt{1-8x}$ **Rpta.:** $\frac{1}{3}$

30. $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$, Si $f(2-x) = \frac{2-x}{x(x-4)}$ **Rpta.:** $-\frac{5}{9}$

3.9 LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

Para calcular límites trigonométricos se hará uso, con relativa frecuencia del siguiente teorema.

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\operatorname{Sen} \mu}{\mu} = 1$$

Donde $\mu = \mu(x)$

De este teorema se deducen las siguientes proposiciones:

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\mu}{\operatorname{Sen} \mu} = 1 \qquad \lim_{\mu \to 0} \frac{\operatorname{Tg} \mu}{\mu} = 1 \qquad \lim_{\mu \to 0} \frac{\mu}{\operatorname{Tg} \mu} = 1$$

OTROS LIMITES:

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{\operatorname{Sen} \mu}{\mu} = 0 \qquad \lim_{\mu \to 0} \cos \mu = 1 \qquad \lim_{\mu \to 0} \operatorname{sen} \mu = 0$$

Además es necesario, el uso de las **IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS** y **TRANSFORMACIONES**, tales como las siguientes:

Transformaciones de suma y diferencias en producto:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \begin{cases} \operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A \\ \cos^2 A = 1 - \operatorname{sen}^2 A \end{cases}$$

$$1 + \operatorname{tag}^2 A = \sec^2 A \quad \begin{cases} \operatorname{tag}^2 A = \sec^2 A - 1 \\ 1 = \sec^2 A - \operatorname{tag}^2 A \end{cases}$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A \quad \begin{cases} \operatorname{cotg}^2 A = \csc^2 A - 1 \\ 1 = \csc^2 - \operatorname{cotg}^2 A \end{cases}$$

IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\operatorname{sen} A \cdot \csc A = 1 \quad \begin{cases} \operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\csc A} \\ \csc A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A} \end{cases}$$

$$\cos A \cdot \sec A = 1 \quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{1}{\sec A} \\ \sec A = \dfrac{1}{\cos A} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} A \cdot \cot A = 1 \quad \begin{cases} \operatorname{tag} A = \dfrac{1}{\cot g A} \\ \operatorname{cotg} A = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A} \end{cases}$$

IDENTIDADES POR DIVISIÓN

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$$

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

ÁNGULO DUPLO

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cdot \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2A) \quad \text{ó} \quad 1 - \cos B = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{B}{2}$$

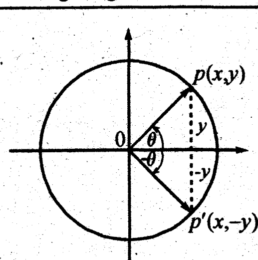
$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A) \quad \text{ó} \quad 1 + \cos B = 2 \cos^2 \tfrac{B}{2}$$

Suma y Diferencia de dos Ángulos

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$$



Arco negativo: $-\theta$

$|\overrightarrow{op}| = |\overrightarrow{op'}| = r = 1$

Tenemos: $\operatorname{sen}\theta = y$, $\operatorname{sen}(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$, $\cos(-\theta) = x$

Luego: $\begin{cases} \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \end{cases}$

ÁNGULO COMPLEMENTARIO	ÁNGULO SUPLEMENTARIO	ÁNGULO: $2\pi-\theta$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$	$\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}(2\pi-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cotg}\theta$	$\operatorname{sen}(\pi+\theta)=-\operatorname{sen}\theta$	
	$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	

3.9.1 Ejercicios resueltos.

01 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}3x}$

Solución:

Al sustituir "*x* por 0", obtenemos: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}3x}=\frac{\operatorname{sen}0}{\operatorname{sen}0}=\frac{0}{0}=$ Indeterminado

Para levantar la indeterminación, bastará formar funciones de la forma $\frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}$.

Para ello: dividir numerador y denominador por "*x*", donde $x\neq 0$. Luego en el numerador dividir y multiplicar por 5, en el numerador multiplicar y dividir por 3.

Así: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}5x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}3x}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\5x\to 0\\3x\to 0}}\frac{5\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}}{3\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}$

02 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\operatorname{sen}3\pi x}$

Solución:

1° Al sustituir "*x* por 0", obtenemos: $\frac{\operatorname{sen}0°}{\operatorname{sen}0°}=\frac{0}{0}=$ Indeterminado

2° Dividir numerador y denominador por "*x*", donde $x\neq 0$

Así: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}3\pi x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}}{3\pi\frac{\operatorname{sen}3\pi x}{3\pi x}}=\frac{\pi}{3\pi}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}}{\frac{\operatorname{sen}3\pi x}{3\pi x}}=\frac{\pi}{3\pi}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$

03 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0" obtenemos: $\frac{1-\cos 0°}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=$ Indeterminado

2° Pero: $1-\cos x=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

Luego: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}2\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}\right]^2=2\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right]^2$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=2\tfrac{1}{4}(1)^2=\tfrac{1}{2}$$

04 Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$

Solución:

1° Al sustituir "x por $\frac{\pi}{4}$" obtenemos: $\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-1}=\frac{0}{0}$

2° Levantar la indeterminación: $\frac{0}{0}$

Cuando se tiene funciones tales como: tangente, cotangente, secante y cosecante, es mejor convertirlos en función del seno y coseno.

Así: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x(\operatorname{sen}x-\cos x)}{\cos x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x(\cos x-\operatorname{sen}x)}{(\cos x-\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

05 Calcular: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$

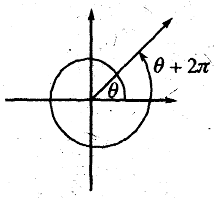
Solución:

1° Al sustituir "x por -2", obtenemos: $\frac{\operatorname{tg}(-2\pi)}{-2+2}=\frac{-\operatorname{tg}(2\pi)}{0}=\frac{0}{0}$

2° Levantar la indeterminación: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\frac{\cos\pi x}{\cos\pi x}}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{(x+2)\cos\pi x}$

Aquí está la indeterminación

Pero: $\operatorname{sen}\pi x=\operatorname{sen}(\pi x+2\pi)$

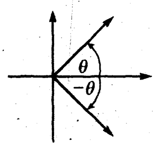


"2π es una vuelta entera"

Luego: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{(x+2)\cos\pi x}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{sen}(\pi x+2\pi)}{(x+2)\cos\pi x}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{sen}\pi(x+2)}{(x+2)\cos\pi x}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\pi\frac{\operatorname{sen}\pi(x+2)}{\pi(x+2)}}{\cos\pi x}=\frac{\pi}{\cos(-2\pi)}=\frac{\pi}{\cos 2\pi}=\frac{\pi}{1}=\pi$$

Propiedad: $\begin{cases}\operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\end{cases}$



RECOMENDACIÓN FUNDAMENTAL: Cuando se trata de calcular límites como en el ejercicio (5), lo mejor y más seguro para resolverlo, es usando el siguiente teorema:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)$$

Donde: $x-x_0=h \iff x=x_0+h$

Como: $x\to x_0$ entonces $h\to 0$

Este teorema se demostrará más adelante

En consecuencia, el ejercicio (5) se podrá resolver del siguiente modo:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi(h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\pi h-2\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}\pi h-\operatorname{tg}2\pi}{1+\operatorname{tg}\pi h\cdot\operatorname{tg}2\pi}}{h}$$

Pero $tg\,2\pi=0$

Haciendo: $x-(-2)=h \iff x=h-2$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi h}{h}=\lim_{h\to 0}\pi\frac{\operatorname{tg}\pi h}{\pi h}$$

(→ 1)

Como: $x\to -2$ entonces $h\to 0$

$$=\pi$$

06 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$

Solución:

1° Al sustituir "x por 1", obtenemos: $(1-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=0.\infty=$ Indeterminado

2° Levantar la indeterminación:

Pero: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{h\to 0}(-h)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(h+1)=-\lim\limits_{h\to 0}h\operatorname{tg}\left(\frac{\pi h}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

Haciendo: $x-1=h \iff x=h+1$

Como: $x\to 1$ entonces $h\to 0$

$$=-\lim h\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}+\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}\cdot\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}}}\right]$$

Con esta transformación, no se logró levantar la indeterminación $0\cdot\infty$. Aprovechando la equivalencia $\infty=\frac{1}{0}$, en el límite, podemos hacer uso de otras identidades trigonométricas.

- Una forma, es haciendo uso de $\operatorname{tg}A=\frac{\operatorname{sen}A}{\cos A}$, $\cos A=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$.

Así:

$$(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=(1-x)\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{(1-x)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\frac{(1-x)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

En el límite:

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{(1-x)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}\right\}=\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{\pi}$$

- Otra forma, se explica a continuación.

Observación: Para evitar la indeterminación: $0.\infty$, lo primero que se hace es convertir el "∞" en "$\frac{1}{0}$", de modo que: $0.\infty = 0.\frac{1}{0} = \frac{0}{0}$.

En consecuencia: $$L = \lim_{x\to 1} \overbrace{(1-x)}^{0}\ \overbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}}^{\infty} = \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}$$

Pero: $\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)$, luego $L = \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}$

$$= \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)}}_{1} = \frac{2}{\pi}$$

CALCULAR:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **R.** -2

2. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\sec\frac{\pi}{2}x$ **R.** $-\frac{4}{\pi}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ **R.** $\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{6x-\pi}$ **R.** $\frac{1}{6}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x}-4}{\pi-6x}$ **R.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x+1)^2}{x-\pi}$ **R.** 0

7. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\frac{2\operatorname{sen}x+\cos x-1}{\sec x+\operatorname{tg}x(\cos x-1)-1}}{x-\pi}$ **R.** 1

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sec x}{\cos x}-\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{cotg}x}+\operatorname{sen}^4x+2\cos^2x-\cos^4x-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2x-\pi}$ **R.** -1

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)^2}{\cos^4x-\operatorname{sen}^4x}+2\operatorname{sen}^2x-\operatorname{tg}x}{\pi-4x}$ **R.** $\frac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left((x-2\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{\cos x-\operatorname{tg}\frac{x}{8}}{\frac{x}{2}-\pi}\right)$ **R.** $-\frac{9}{2}$

07 Calcular: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}$

Solución:

1° Al sustituir "x por π", obtenemos $\frac{0}{0}$

2° Levantar la indeterminación:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+h}{2}\right)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)}{-h}$$

Haciendo: $x-\pi=h \iff x=\pi+h$

Como: $x\to\pi$ entonces $h\to 0$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\left[\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}\cos\frac{h}{2}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right]}{-h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{h}{4}}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{4}}{4\frac{h}{4}}\operatorname{sen}\frac{h}{4}=-\frac{2}{4}(1)\underbrace{\operatorname{sen}0}_{0}$$

$$=-\frac{2}{4}(0)=0$$

También se puede calcular, haciendo el siguiente artificio: $1=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}}{2}\right]\operatorname{sen}\left[\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}{2}\right]}{\pi-x}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos\frac{\pi+x}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi-x}{4}}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos\frac{\pi+x}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi-x}{4}}{4\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}}{2}(1)$$

$$=\frac{2(0)}{4}=0$$

08 Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\dfrac{0}{0}$

Solución:

Haciendo : $x-\frac{\pi}{3}=h \iff x=\frac{\pi}{3}+h$

Como : $x\to\frac{\pi}{3}$ entonces $h\to 0$

Luego: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)}{\pi-3\left(\frac{\pi}{3}+h\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-2\left[\overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{\frac{1}{2}}\cos h - \overbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{sen} h\right]}{\pi-\pi-3h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-2\left[\frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} h\right]}{-3h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h+\sqrt{3}\operatorname{sen} h}{-3h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{-3h} + \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} h}{-3h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{(1-\cos h)(1+\cos h)}^{\operatorname{sen}^2 h}}{-3h(1+\cos h)} + \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} h}{-3h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{-3(1+\cos h)}\overbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}^{1} + \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}}{-3}\overbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}^{1}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{-3(1+\cos h)} + \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

También se puede calcular haciendo el siguiente artificio:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\frac{\pi}{3}-2\cos x}{\pi-3x}, \qquad \text{Pues: } 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right]}{\pi-3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left[-2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}\right]}{\pi-3x}$$

$$= -4\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi-3x}{6}}{6\,\frac{\pi-3x}{6}} = -\frac{4}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{4}{6}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

09 Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}\pi x}$

Solución: Es: $\frac{0}{0}$

- Se puede evitar la indeterminación haciendo:

$$\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}\pi x} = \frac{(1-x)(1+x)}{\operatorname{sen}(\pi-\pi x)} = \frac{(1-x)(1+x)}{\operatorname{sen}[\pi(1-x)]} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi(1-x)(1+x)}{\operatorname{sen}[\pi(1-x)]}$$

- Otra forma de evitar la indeterminación es, haciendo: $x-1=h \iff h+1$. Cuando $x\to 1,\ h\to 0$.

Luego: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}\pi x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-(h+1)^2}{\operatorname{sen}[\pi(h+1)]}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-(h^2+2h+1)}{\operatorname{sen}(\pi h+\pi)}=$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-h^2-2h-1}{\operatorname{sen}\pi h\cdot\cos\pi+\cos\pi h\operatorname{sen}\pi}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h}{-\operatorname{sen}\pi h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h(h+2)}{-\operatorname{sen}\pi h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{h(h+2)}{\operatorname{sen}\pi h}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\pi h}{\operatorname{sen}\pi h}(h+2)=\frac{1}{\pi}(0+2)=\frac{2}{\pi}$$

10 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{0}{0}$

<u>Solución</u>:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\operatorname{sen}x}{x^3}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x}}{x^3}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x}{x^3\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}x\left(2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[2\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right]=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}x}{x}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}\right]^2\frac{1}{\cos x}\right]$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}x}{x}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{\cos x}\right]=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}x}{x}\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{\cos x}\right]$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot(1)^2\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

11 Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{\cos x+\cos 2x}$

<u>Solución</u>:

1° Sustituir "x por $\frac{\pi}{3}$", tenemos: $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{0}{0}$

2° Levantar la indeterminación:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{\cos x+\cos 2x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{\cos x+\cos 2x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}x\cos 2x+\cos x\operatorname{sen}2x}{\cos x\cos 2x}}{\cos x+\cos 2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\operatorname{sen}3x}{\cos x\cdot\cos 2x\left(2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)}\right]$$

Por la fórmula del **ÁNGULO DUPLO**: $\operatorname{sen}2A = 2\operatorname{sen}A\cdot\cos A$

Tenemos: $\operatorname{sen}3x = 2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

Entonces: $$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\cos x\cdot\cos 2x\left(2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{\cos x\cdot\cos 2x\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$L=\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=-\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

12 Calcular: $L=\lim_{x\to0^+}\operatorname{cotg}2x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)x\Big)$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0", obtenemos: $=\operatorname{cotg}0\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}$

$=\infty.0$

2° Levantar la indeterminación:

$$L=\lim_{x\to0}\left[\operatorname{cotg}2x.\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\lim_{x\to0}\left[\operatorname{cotg}2x.\operatorname{tg}x\right],\ \text{pues: } \operatorname{tg}x=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}2x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\cos 2x}{\cos x}\right]\left[\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}2x}\right]$$

$$=\left[\frac{\cos 0}{\cos 0}\right]\left[\lim_{x\to0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}2x}{x}}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{1}\right]\lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{2\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}}\right]=\frac{1}{2(1)}=\frac{1}{2}$$

$$L=\frac{1}{2}$$

13 Calcular: $L=\lim_{x\to0^+}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0", obtenemos: $0\cdot\text{sen}\frac{1}{0}=0\cdot\text{sen}\,\infty=0\cdot\infty$

2° Levantar la indeterminación:

Haciendo: $\frac{1}{x}=y \iff x=\frac{1}{y}$

Como $x\to 0^+$ entonces $y\to+\infty$

Luego: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\text{sen}\frac{1}{x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\text{sen}\,y=\boxed{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\text{sen}\,y}{y}=0}$ Ver al gráfico más adelante.

14 Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\text{sen}\frac{1}{x}\right)$

Solución:

1° Al sustituir "x por ∞" obtenemos: $\infty\cdot\text{sen}\frac{1}{\infty}=\infty\cdot\text{sen}\,0=\infty\cdot 0 \longleftarrow$ Indeterminado

2° Haciendo $\frac{1}{x}=h \iff x=\frac{1}{h}$

Como $x\to+\infty$ entonces $h\to 0^+$

Luego: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\text{sen}\frac{1}{x}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\text{sen}\,h=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\text{sen}\,h}{h}=1$

15 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\,\text{sen}\frac{mx+nx}{2}\,\text{sen}\frac{mx-nx}{2}}{x^2}\right]=$$

$$-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}\frac{(m+n)x}{2}}{x}\,\frac{\text{sen}\frac{(m-n)x}{2}}{x}\right]=-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}\frac{(m+n)}{2}x}{\frac{2}{(m+n)}\underbrace{\frac{(m+n)}{2}x}}\cdot\frac{\text{sen}\frac{(m-n)}{2}x}{\frac{2}{(m-n)}\underbrace{\frac{(m-n)}{2}x}}\right]$$

(cada cociente encerrado $\to 1$)

$$=-2\left[\frac{1}{\frac{2}{m+n}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{m-n}}\right]=\frac{1}{2}(n^2-m^2),\ n\neq m$$

16 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg} x$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0", obtenemos: $(1-\cos 0°)\operatorname{cotg}0° = (1-1)\,\infty = 0.\infty \longleftarrow$ Indeterminado

2° Levantar la indeterminación: convertir $0\cdot\infty = 0\cdot\frac{1}{0}$

Pero: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg} x = \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, multiplicar numerador y denominador por: $1+\cos x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1-\cos^2 x)}{(1+\cos x)}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\cdot\cos x\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 0}{1+\cos 0}\cos 0 = \frac{0}{1+1}\cdot 1$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

17 Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$

Solución:

Al sustituir "x por 0" obtenemos: $\dfrac{1+\cos 0}{\operatorname{tg}^2 0} = \dfrac{1+1}{0} = \dfrac{2}{0} = \infty$. Como vemos, no ha resultado indeterminado, por lo tanto el ejercicio queda concluido.

18 Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}\right]$

Solución:

1° Al sustituir "x por 1" obtenemos: $\dfrac{1+\cos\pi}{(\operatorname{tg}\pi)^2} = \dfrac{1-1}{0^2} = \dfrac{0}{0}$

2° Levantar la indeterminación: multiplicar numerador y denominador por: $1-\cos\pi x$

Así: $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{(1+\cos\pi x)(1-\cos\pi x)}{\frac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\cos^2\pi x}(1-\cos\pi x)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\cos^2\pi x}{\frac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\cos^2\pi x}(1-\cos\pi x)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\frac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\cos^2\pi x}(1-\cos\pi x)}\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\pi x\cdot\cos^2\pi x}{\operatorname{sen}^2\pi x(1-\cos\pi x)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos^2\pi x}{1-\cos\pi x}\right] = \frac{(\cos\pi)^2}{1-\cos\pi x} = \frac{(-1)^2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

19 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}=\dfrac{0}{0}$

Solución:

Dividir numerador y denominador por "x" donde $x\neq 0$.

Entonces: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{x}-\frac{\operatorname{sen}2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\operatorname{sen}3x}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}}{1+3\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

20 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{0}{0}$

Solución:

Racionalizar el denominador y en el numerador, usar la cofunción: $\cos\frac{\pi}{2}x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)$

Así: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+\sqrt{x})\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+\sqrt{x})\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+\sqrt{x})\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{1+1}{\frac{2}{\pi}}=\pi$$

21 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\operatorname{sen}3x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}4x)}=\dfrac{0}{0}$

Solución:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\operatorname{sen}3x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}4x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\operatorname{sen}3x}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}3x}{2}\right)^2}{\left(\frac{\operatorname{sen}3x}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{4}}{\operatorname{sen}^2 4x\left[\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}4x)}{\operatorname{sen}4x}\right]^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{\operatorname{sen}^2 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{9\left[\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\right]^2}{16\left[\frac{\operatorname{sen}4x}{4x}\right]^2}=\frac{9}{32}$$

Método 2.- Por infinitesimos equivalentes:

1) Si $\alpha \to 0$, entonces: $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha \quad \wedge \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$

Ejemplos: 1) $\operatorname{sen}3x \approx 3x$, si $3x \to 0$

2) $\operatorname{sen}4x \approx 4x$, si $4x \to 0$

2) Si $\alpha \to 0$, entonces $Ln(1+\alpha) \approx \alpha$

3) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = Ln\,a \quad \wedge \quad \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1$

Luego: $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(\operatorname{sen}3x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}4x)}$, como $\begin{cases} \operatorname{sen}3x \approx 3x \\ \operatorname{sen}4x \approx 4x \end{cases}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2}}{\operatorname{sen}^2 4x}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{9}{4}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right]^2}{16\left[\frac{\operatorname{sen}4x}{4x}\right]^2} = \frac{2 \cdot \frac{9}{4}}{16} = \frac{9}{32}$$

EJERCICIOS Sección 3.9.2

Para toda función de $f: A \to I\!R$ continua en $x = a \in A$ definamos el siguiente límite indeterminado $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ llamado "la derivada de f en a".

Hallar $f'(a)$, si existe, para las siguientes funciones:

22. $f(x) = \operatorname{sen}x$

23. $f(x) = \cos x$

24. $f(x) = \operatorname{tg}2x$

25. $f(x) = \operatorname{ctg}x$

26. $f(x) = \sec x$

27. $f(x) = \csc x$

28. $f(x) = 2x - \operatorname{sen}^2 2x$

29. $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3\cos 3x$

30. $f(x) = 3\sqrt[3]{3x-1} - 2\operatorname{tg}^2 2x$

31. $f(x) = 5\sqrt[5]{5x^2-1} + 2\sec(5x-1)$

32. $f(x) = 2\operatorname{ctg}3x - 2\sqrt{\sec 2x}$

33. $f(x) = 5x - 2\sqrt{2x-1} + 3\sec 2x$

Respuestas:

22. $\cos a$ **23.** $-\operatorname{sen} a$ **24.** $2\sec^2 2a$

25. $-\csc^2 a$ **26.** $\sec a \cdot \operatorname{tg} a$ **27.** $-\csc a \cdot \operatorname{ctg} a$

28. $2-2\operatorname{sen}4a$ **29.** $\frac{1}{\sqrt{2a-1}}-9\operatorname{sen}3a$ **30.** $\frac{3}{\sqrt[3]{(3a-1)^2}}-8\operatorname{tg}2a\cdot\sec^2 2a$

31. $\frac{10a}{\sqrt[5]{(5a^2-1)^4}}+10\sec(5a-1)\operatorname{tg}(5a-1)$

32. $-6\sec^2 3a-2\operatorname{tg}2a\sqrt{\sec 2a}$

33. $5-\frac{2}{\sqrt{2a-1}}+6\sec 2a\cdot\operatorname{tg}2a$

Hallar:

34 $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ **Rpta.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

35 $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ **Rpta.** -24

36 $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$ **Rpta.** $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$

37 $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}{x^3}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

38 $L=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}3x$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

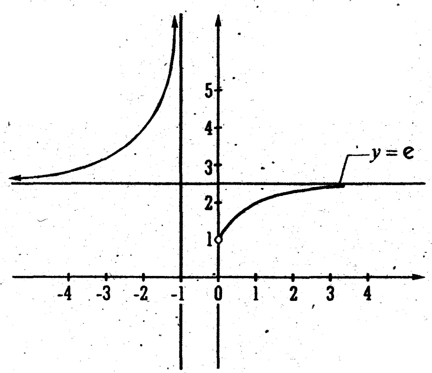
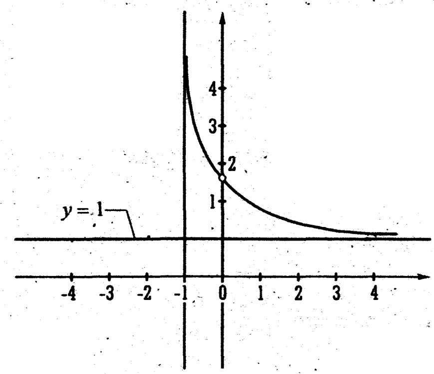
39 $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

40 $L=\lim\limits_{x\to 1}(1-\sqrt{x})\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ **Rpta.** $\frac{1}{\pi}$

41 $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$ **Rpta.** 14

3.10 EL NÚMERO e

Sean las funciones:

<table>
<tr><td rowspan="2">$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$</td><td>$\text{Dom}(f)=x\in\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle0,+\infty\rangle$</td><td rowspan="2">$g(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$</td><td>$\text{Dom}(g)=x\in\langle-1,0\rangle\cup\langle0,+\infty\rangle$</td></tr>
<tr><td>$\text{Rang}(f)=y\in\langle1,e\rangle\cup\langle e,+\infty\rangle$</td><td>$Rang(g)=y\in\langle1,e\rangle\cup\langle e,+\infty\rangle$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El gráfico de $f(x)$ es:

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$</td><td colspan="2">El gráfico de $g(x)$ es:

$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\ 0^-}}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$</td></tr>
</table>

Definición: El número "e", por definición es un límite ¿el límite de qué función?. Es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$. También podemos definir como el límite de la función $g(x)$ cuando x tiende hacia cero por la derecha o hacia cero por la izquierda.

Además, debe aclararse que el número "e" es un **NÚMERO IRRACIONAL** cuya aproximación decimal es: $e\approx$ **2.7182...**

Cuando se estudian las series **INFINITAS DE MACLAURIN**, el número "e" viene a ser el desarrollo de la siguiente serie.

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\approx2.7182\ldots$$

Aplicaciones del número e

1) EL número e da origen al sistema de logaritmos conocido comúnmente como los **LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS** cuya base es el número e.

Así tendremos por definición que: $\boxed{\operatorname{Ln} N = x \iff N = e^{x}}$, $N > 0$

Ejemplos:

1. $\operatorname{Ln}(x-1) = -2 \iff x-1 = e^{-2}$

   $\iff x = e^{-2} + 1$

2. $\operatorname{Ln} e^{-2} = -2$

3. $\operatorname{Ln} e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

4. $\operatorname{Ln} 2 = 0.6931$

5. $\operatorname{Ln} 100 = 4.6051$

2) el número e da origen a las funciones exponenciales simples y a las funciones hiperbólicas.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$\operatorname{sen} hx = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ $\operatorname{cotg} hx = \dfrac{1}{\operatorname{tg} hx}$

$\cos hx = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\operatorname{sen} hx = \dfrac{1}{\cos hx}$

$\operatorname{tg} hx = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ $\csc hx = \dfrac{1}{\operatorname{sen} hx}$

FUNCIONES EXPONENCIALES SIMPLES

1. $f(x) = e^{x}$
2. $g(x) = e^{-x}$
3. $h(x) = e^{2x}$
4. $j(x) = e^{-3x}$
5. $y = \alpha e^{\beta x}$

   α y β son parámetros
6. $y = 2e^{-2x}$

3) En la solución de muchas ecuaciones diferenciales, no dejan de aparecer como solución las funciones exponenciales.

Ejemplos:

1. La solución de la ecuación diferencial: $y'' - 5y' + 6y = 0$ es:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2. La solución de: $y'' - y' = 0$ es $y = c_1 + c_2 e^{x}$

3. La solución de la ecuación diferencial: $y''+3y'+2y=0$; cuando $y=1$, $y'=1$ para $x=0$; es $y=e^{-x}$

4) En el cálculo de probabilidades (**ESTADÍSTICA**) se estudian las siguientes distribuciones.

1. $p(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ **DISTRIBUCIÓN DE POISSON**

2. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$ **DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL**

3. $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\ p>0$ **FUNCIÓN GAMMA**
   $\Gamma(n)=(n-1)!,\ n\in\mathbb{Z}^+$
   $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x\in\mathbb{R}\ \begin{cases}\mu=\text{media}\\ \sigma=\text{desviación estándar}\end{cases}$ **DISTRIBUCIÓN NORMAL**

5. $f(x)=\dfrac{1}{f(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}},\ x>0\begin{cases}0<\alpha\\0<\beta\end{cases}$ **FUNCIÓN GAMMA.**

❒ 3.10.1 LÍMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA: 1^{∞}

Cuando al calcular un límite resulta la indeterminación 1^{∞} entonces debe tratarse de formar una función de la forma $(1+\mu(x))^{\frac{1}{\mu(x)}}$ o de la forma $\left(1+\frac{1}{\mu(x)}\right)^{\mu(x)}$ de modo que en el límite resulte el número e.

EJEMPLOS

01 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]^x$

Solución:

1° Al sustituir "x por $+\infty$" obtenemos: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty}$

2° Levantar la indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$ dividiendo numerador y denominador por x.

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]^x=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{x}\right]^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{e}$$

$$L=\frac{e^{-1}}{e}=\frac{1}{e^2}$$

02 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0" obtenemos: 1^{∞}

2° Levantar la integración: $L=\lim\limits_{x\to 0}\Big(\underbrace{[1+\operatorname{sen}x]^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}_{e}\Big)^{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$

$$=e^1=e$$

03 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2}}$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0" obtenemos: 1^{∞}

2° Sumar y restar 1 dentro del paréntesis, así: $L=\lim\limits_{x\to 0}(1-1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}(1-(1-\cos x))^{\frac{1}{x}}$$

Pero: $1-\cos x=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$, luego: $L=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\left[\left[1+\left(-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}}\right]}_{e}^{\frac{-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x}}$

$$L=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$=e^0=1$$

04 Calcular: $L = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución:

1° Al sustituir "x por 0": $1^{\infty} \longleftarrow$ Indeterminado

2° Para levantar la indeterminación procedemos como en el problema 3.

$$L = \lim_{x \to 0}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0}\left[1 + \left(-2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{-2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2}}$$

$$L = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2}}$$

$$L = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{-\frac{2}{2 \cdot 2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

05 Calcular: $L = \lim\limits_{x \to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución:

1° Al sustituir "x por 1" obtenemos: 1^{∞}, porque $x < 1$

2° Como: $x \to 1^-$

$x < 1$

$x - 1 < 0 \Rightarrow$ hacemos: $\begin{cases} 1 - x = h \\ x = 1 - h \end{cases}$

$\underbrace{1 - x}_{h \to 0} > 0$

Como: $x \to 1^-$ entonces $h \to 0^+$

Luego: $L = \lim\limits_{x \to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{h \to 0^-} (1-h)^{\frac{1}{h}}$

$$= \lim_{h \to 0} [(1 + (-h))^{\frac{1}{-h}}]^{-1} = e^{-1}$$

06 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\operatorname{sen}x]{\dfrac{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x}}$

<u>Solución</u>:

1° Al sustituir "x por 0" obtenemos: $1^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$

2° Dividir el numerador entre el denominador:

$$L=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{-2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$$. Formar el número e:

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\left(1+\frac{-2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x}{-2\operatorname{sen}x}}\right]}_{e}{}^{\frac{-2}{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2}{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x}}$$

$$=e^{\frac{-2}{\operatorname{sen}a}}$$

07 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}\operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\infty.0$ ⟵ Indeterminado

<u>Solución</u>:

$$L=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}\operatorname{Ln}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^{+}}\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left[\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left[\frac{\lim\limits_{x\to 0^{+}}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left[\left(1+(-x)^{\frac{1}{-x}}\right)^{-1}\right]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left[\frac{e}{e^{-1}}\right]=1$$

08 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(\cos x)}{x^2}=\frac{\text{Ln}1}{0}=\frac{0}{0}$

Solución:

$$L=\lim_{x\to 0}\left[\text{Ln}(\cos)^{\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$=\text{Ln}\left[\lim_{x\to 0}(\cos)^{\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$=\text{Ln}\left[e^{-\frac{1}{2}}\right]=-\frac{1}{2}$$, ver problema 04.

❐ 3.11 LÍMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

I LÍMITES AL INFINITO

Proposición 1: Sea la función racional: $R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Donde: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ y

$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$

Son polinomios de grado n y m respectivamente: $n\in\mathbb{Z}^+$, $m\in\mathbb{Z}^+$

Demostrar que: $$\lim_{x\to+\infty}R(x)=\begin{cases}\infty\ ,\text{si } n>m\\ \frac{a_0}{b_0}\ ,\text{si } n=m\\ 0\ ,\text{si } n<m\end{cases}$$

Prueba:

$R(x)$ se puede expresar de la siguiente forma: $R(x)=\frac{x^n\left[a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}\right]}{x^m\left[b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}\right]}$ y teniendo en cuenta que: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}\frac{K}{x^n}=0$, $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, $K\in\mathbb{R}$.

Tenemos:

a) Si $n > m$, entonces dividir numerador y denominador entre "x^n" obteniendo:

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right]}{\frac{1}{x^{n-m}}\left[b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}\right]} = \frac{a_0}{0} = +\infty$$

b) Si $m = n$, entonces al dividir numerador y denominador entre "x^m" obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right]}{\left[b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}\right]} = \frac{a_0}{b_0}$$

c) Si $n < m$, entonces dividir numerador y denominador entre "x^m" obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^{m-n}}\left[a_0 + \frac{a_0}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right]}{\left[b_0 + \frac{b_0}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}\right]} = \frac{0}{b_0} = 0$$

<u>Proposición 2:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} R(-x)$

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = \frac{2|x|}{1+x}$, $x \neq -1$. Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

<u>Solución:</u>

1° Definir el valor absoluto $f(x)$: $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x}, & \text{Si } x \geq 0 \\ \frac{-2x}{1+x}, & \text{Si } x < 0,\ x \neq -1 \end{cases}$

2° $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2(-x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}-1} = -2$

3° $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}+1} = 2$

3.11.1 ASÍNTOTAS: HORIZONTALES, OBLICUAS Y VERTICALES

a) ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Sea la función real $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x)\neq 0$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=L \vee \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=M$ con $L\in\mathbb{R}$, $M\in\mathbb{R}$ entonces los límites $y=L$, $y=M$ son asíntotas horizontales de la curva $f(x)$.

En el ejemplo anterior $y=-2$ es asíntota horizontal de $f_2(x)$; $y=2$ de $f_1(x)$.

b) ASÍNTOTA OBLICUA: La recta $y=ax+b$, $a\neq 0$, es una asíntota oblicua de la curva $y=f(x)$ sí, y solo si una de las siguientes condiciones se cumplen:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \wedge \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ ó

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \wedge \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$

II LIMITES INFINITOS

Proposición 3: *i*) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}-\infty \text{ si } n \text{ es impar.}\\ +\infty \text{ si } n \text{ es par.}\end{cases}$

c) ASÍNTOTA VERTICAL: Sea la función real $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, si $x=x_0$ es una raíz real del denominador $Q(x)$ y a su vez:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty \vee \lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$, entonces $x=x_0$ es asíntota vertical de la curva $f(x)$.

Ejemplo:

Sea la función $f(x)=\frac{-x}{x^2-4}$

Las raíces reales del denominador son $x = \pm 2$, además:

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x_0 \to 2^+} f(x) = -\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

Luegó $x = 2$, $x = -2$ son **ASÍNTOTAS HORIZONTALES.**

❐ 3.11.2 PROBLEMAS RESUELTOS

01 Calcular: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Solución:

Al multiplicar los factores del numerador se obtiene un polinomio de 5^{to} grado. El denominador es otro polinomio de 5^{to} grado, por tanto dividir numerador y denominador entre x^5:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(x-1)}{x}\frac{(x-2)}{x}\frac{(x-3)}{x}\frac{(x-4)}{x}\frac{(x-5)}{x}}{\left(\frac{5x-1}{x}\right)^5} \qquad L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(5-\frac{1}{x}\right)^5} = \frac{1}{5^5}$$

02 Calcular: $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$

Solución:

Al multiplicar los factores del numerador resulta un polinomio de grado igual a: $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$ que es igual al grado del polinomio del denominador, entonces dividir numerador y denominador entre $x^{\frac{(1+n)n}{2}}$.

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(x+1)}{x}\frac{(x^2+1)}{x^2}\frac{(x^2+1)}{x^3}\ldots\frac{(x^n+1)}{x^n}}{\left(\frac{n^n x^n}{x^n}+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad L = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

03 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

Solución:

Al sustituir "x por $+\infty$" obtenemos $\infty-\infty$ que es indeterminado. La indeterminación de la forma $\infty-\infty$, se evita "racionalizando":

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})\,\text{F.R.}}{\text{F.R.}} \Rightarrow L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3+x^2-1}{\text{F.R.}}$$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}$$

Dividir numerador y denominador entre x^2.

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}}{x}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{x}+\frac{\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

$$L=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

04 Calcular: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

Solución:

Al sustituir "x por $+\infty$" obtenemos $\infty-\infty$, que es una forma indeterminada y se evita racionalizando.

Como los radicales tienen índices diferentes convertimos en índices comunes:

El (Mínimo Común Índice) m.c.i. de 3 y 2 es 6

Luego: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^2}-\sqrt[6]{(x^2-2x)^3}\right)$

Recién racionalizamos:

El factor racionalizante de $(\sqrt[6]{A}-\sqrt[6]{B})$ es:

$$\text{F.R.}=\sqrt[6]{A^5}+\sqrt[6]{A^4}\,\sqrt[6]{B}+\sqrt[6]{A^3}\,\sqrt[6]{B^2}+\sqrt[6]{A^2}\,\sqrt[6]{B^3}+\sqrt[6]{A}\,\sqrt[6]{B^4}+\sqrt[6]{B^5}$$

Por tanto: $$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^2}-\sqrt[6]{(x^2-2x)^3}\right)\text{F.R.}}{\text{F.R.}}$$

$$\frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{\sqrt[6]{[(x^3+3x^2)^2]^5}+\ldots+\sqrt[6]{[(x^2-2x)^3]^5}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^5-3x^4+8x^3}{\sqrt[6]{}+\ldots+\sqrt[6]{}}$$

Dividir entre x^5 numerador y denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}{\frac{\sqrt[6]{[(x^3+3x^2)^2]^5}}{x^5}+\ldots+\frac{\sqrt[6]{[(x^2-2x)^3]^5}}{x^5}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{10}}+\ldots+\sqrt[6]{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{15}}}$$

$$L=\frac{12}{1+1+1+1+1+1}=\frac{12}{6}=2$$

05 Calcular: $L=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

<u>Solución</u>:

$L=\infty(\infty-\infty)$ ← Indeterminado

Levantar la indeterminación. Para ello antes de racionalizar introducir $x^{\frac{1}{3}}$ como factor:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left[(x^{\frac{1}{3}}(x+1))^{\frac{2}{3}}-(x^{\frac{1}{3}}(x-1))^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left[(x(x+1)^2)^{\frac{1}{3}}-(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Ahora racionalizar multiplicando numerador y denominador por su factor racionalizante:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{([x(x+1)^2]^{\frac{1}{3}} - [x(x-1)^2]^{\frac{1}{3}})\ \text{F.R.}}{\text{F.R.}}$$

Como: $(A^{\frac{1}{3}} - B^{\frac{1}{3}})\underbrace{(A^{\frac{2}{3}} + A^{\frac{1}{3}}B^{\frac{1}{3}} + B^{\frac{2}{3}})}_{\text{F.R.}} = A - B$

Luego: $$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+1)^2 - x(x-1)^2}{[x(x+1)^2]^{\frac{2}{3}} + \ldots + [x(x-1)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{[x(x+1)^2]^{\frac{2}{3}} + \ldots + [x(x-1)^2]^{\frac{2}{3}}}$$

Dividir entre x^2: $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\frac{[x(x+1)^2]^{\frac{2}{3}}}{x^2} + \frac{[x(x+1)^2]^{\frac{1}{3}}}{x}\frac{[x(x-1)^2]^{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{[x(x-1)^2]^{\frac{2}{3}}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{[x(x+1)^2]^2}{x^6}} + \ldots + \sqrt[3]{\frac{[x(x-1)^2]^2}{x^6}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}\frac{(x+1)^4}{x^4}} + \ldots + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}\frac{(x-1)^4}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} + \ldots + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}}$$

$$L = \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

06 Hallar las constantes "a" y "b" de la condición: $L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$

<u>Solución</u>:

1) $$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-ax^2-bx-b}{x+1}\right)$$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

2) Analizando: Para que $L=0$, debe cumplirse, en el límite cuando $x\to+\infty$ que: $L=\frac{k}{+\infty}$, $K=$ constante; esto es posible sólo cuando los coeficientes de x^2 y de x sean ceros, es decir:

$$1-a=0 \quad \text{y} \quad -(a+b)=0$$
$$a=1 \qquad\qquad b=-1$$

Siendo así, tendríamos: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-b}{x+1}=0$

07 Hallar la constante de a_i y b_i $(i=1,2)$ de las condiciones

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$ y

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$

<u>Solución de 1)</u>:

1) Pero:

$$L=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-(a_1x+b_1))$$

2) Racionalizar:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-(a_1x+b_1)\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+(a_1x+b_1)\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+(a_1x+b_1)}$$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-(a_1x+b_1)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(a_1x+b_1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-a_1^2x^2-2a_1b_1x-b_1^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(a_1x+b_1)}$$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+(a_1x+b_1)}$$

3) Analizando: Para que el límite sea $L=0$, debe cumplirse que:

$$1-a_1^2=0 \quad \wedge \quad 1+2a_1b_1=0$$

$$a_1=\pm 1 \quad \wedge \quad b_1=-\frac{1}{2a_1}$$

Si $\qquad a_1=1 \;\Rightarrow\; b_1=-\frac{1}{2}$

Si $\qquad a_2=-1 \;\Rightarrow\; b_2=\frac{1}{2}$

2) Queda como ejercicio: $a_2=\pm 1$, $b_2=\pm\frac{1}{2}$.

08 Estudiar el comportamiento de la raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, si el coeficiente "a" tiende a cero mientras que los coeficientes b y c son constantes, siendo $b\neq 0$.

Solución:

1) Las relaciones entre las raíces x_1, x_2 y los coeficientes son:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=\frac{c}{ax_2}=\frac{c}{a\left[-\frac{c}{b}\right]}=\frac{b}{-a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{a\to 1} x_1=\lim_{a\to 0}\frac{b}{-a}=\frac{b}{0}=\pm\infty$$

De $ax^2+bx+c=0$, obtenemos: $\lim\limits_{a\to 0}(ax^2+bx+c)=\lim\limits_{a\to 0}(0)$

$$bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{c}{b},\; b\neq 0 \ldots (2)$$

- El resultado obtenido en (1) es por (2).

ASÍNTOTAS:

09 Sea la función: $\quad f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^2-x^3} & , \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2x^3}{x^2-7x+10} & , \quad x>1 \\ & \quad x\neq 2,\; x\neq 5 \end{cases}$

Hallar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

Solución:

Es la función $f_1(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$, $x\leq 1$

i) Asíntotas horizontales (A.H.) no hay
ii) Asíntotas verticales (A.V.) no hay
iii) Asíntotas oblicuas (A.O.): $y=ax+b$

Donde: $$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x^3}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2+x^3}{-x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f_1(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt[3]{x^2-x^3}-(-1)x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[3]{x^2+x^3}-x]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[3]{x^2+x^3}-\sqrt[3]{x^3}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x^3-x^3}{\sqrt[3]{(x^2+x^3)^2}+\ldots+\sqrt[3]{x^6}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+x^3)^2}+\ldots+\sqrt[3]{x^6}}\text{ , dividir entre } x^2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}+\ldots+\sqrt{1}}=\frac{1}{3}$$

Luego: $y=x+\frac{1}{3}$ es la A.O.

En la función: $f_2(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-7x+10}$

Tenemos:

i) Asíntotas verticales: Se obtienen de igualar a cero el denominador:

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-5)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x=5, x=2 \text{ son A.V.}$$

ii) Asíntotas horizontales: como el dominio es $x>1$, donde x se aleja $a+\infty$, hacemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}}$$

$$=\frac{2}{0}=+\infty$$

$\Rightarrow \quad \nexists$ A.H.

iii) Asíntotas oblicuas: $y=ax+b$

Donde: $$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3+7x^2+10x}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f_2(x)-ax]$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3}{x^2-7x+10}-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3-2x^3+14x^2-20x}{x^2-7x+10}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{14x^3-20x}{x^2-7x+10}=14$$

Luego la A.O. es: $y=2x+14$

EJERCICIOS PROPUESTOS Sección 3.11

Hallar, si existe, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones:

01. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-3}{2x^2+x-1}, & x\le 2,\ x\neq -1,\frac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{2x^3}{x^2-4}, & x>2\end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\ x=-1\\ y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\ y=2x+8\end{cases}$

02. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{|4x|-1}, & x\ge -1, x\neq \pm\frac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{2x}{x+1}, & x<-1\end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases}x=-\frac{1}{2};\ x=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$

03. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2|x|-1}{|x-1|} , & x<1 \\ \dfrac{x^2}{x^2-1} , & x>1 \end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

04. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+3} , & x<-3 \\ \sqrt{x^2+x} , & x\in[-3,-1]\cup[0,+\infty\rangle \end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases} x=-3 \\ y=2x-6 \end{cases}$ $\left\{ y=x+\frac{1}{2} \right.$

05. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x}{e^x-1} , & x\geq -1 , x\neq 0 \\ \dfrac{2x}{|x|-4} , & x<-1 , x\neq -4 \end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases} x=0 \\ y=x \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

06. $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} , & x<3 , x\neq 0 \\ \text{Ln}(1+e^x) , & x\geq 3 \end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases} x=0 \\ y=x \end{cases}$ $\left\{ y=x \right.$

07. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-[x]} , & x<0 , x\notin \mathbb{Z}^- \\ x+\text{arcos}\frac{1}{x} , & x\in\langle 0,+\infty\rangle \end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases} x=-1,-2,-3\ldots \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=x+\frac{\pi}{2} \end{cases}$

08. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x^2}{x^2-9} , & x\in\langle -\infty,-3\rangle \\ \sqrt{\dfrac{2x+3}{x}} , & x\in\left[-3,-\frac{3}{2}\right]\cup[0,+\infty\rangle \end{cases}$ Rpta.: $\begin{cases} x=-3 \\ y=x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

09. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^3+3x+5}{x^2-x-6}+\sqrt{x^2+4} , & x>-1 , x\neq -2,3 \\ \dfrac{-x^3+x^2+1}{x^2+1}+\sqrt{x^2+9} , & x\leq -1 \end{cases}$

Rptas.: $x=3$; $y=4x+3$; $y=-2x+1$

10. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} \ , \ x\leq 2 \ , \ x\neq 1 \\ x+\sqrt[4]{\dfrac{x^6+x^5-x-1}{x^2-4}} \ , \ x>2 \end{cases}$ Rpta. $\begin{cases} x=1 \\ y=x+1 \\ x=2 \\ y=2x+\frac{1}{4} \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \ , \ |x|>1 \\ \dfrac{2x}{|x|-1} \ , \ |x|<1 \\ 1 \ , \ x=-1 \\ 2 \ , \ x=1 \end{cases}$ Rpta. $\begin{cases} x=1 \ , \ x=-1 \\ y=x \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \ , \ x=-1 \\ y=2 \ , \ y=-2 \end{cases}$

❑ 3.11.3 LÍMITES INFINITOS (DEFINICIONES)

ASÍNTOTAS VERTICALES - LIMITES CUANDO $x \to x_0$

Ⓐ

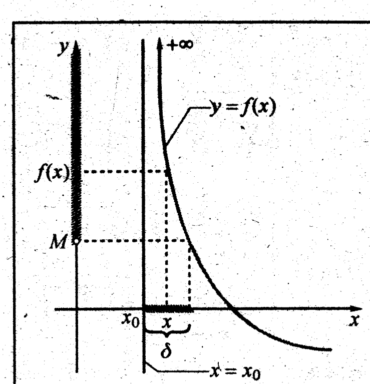
Definición: Si x_0 es punto de acumulación del dominio de f, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \iff$ Dado un número $M>0$ por grande que sea, existe un número $\delta>0$, tal que: $|f(x)|>M$ siempre que $x\in D_f \ \wedge \ 0<|x-x_0|<\delta$

SUS CONSECUENCIAS SON:

A.1

Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f=+\infty \ \Rightarrow$ Dado un $M>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que: $f(x)>M$ siempre que:

$$x\in D_f \ \wedge \ 0<x-x_0<\delta$$

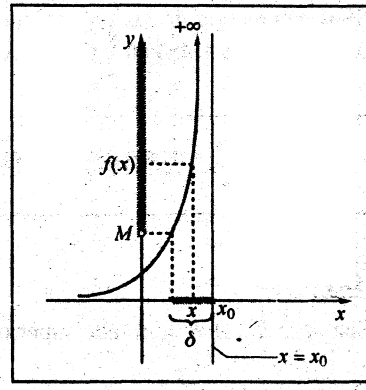


A.2

Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ Dado un $M > 0$, $\exists \delta > 0$

tal que: $f(x) > M$ siempre que:

$$x \in D_f \quad \wedge \quad 0 < x_0 - x < \delta$$

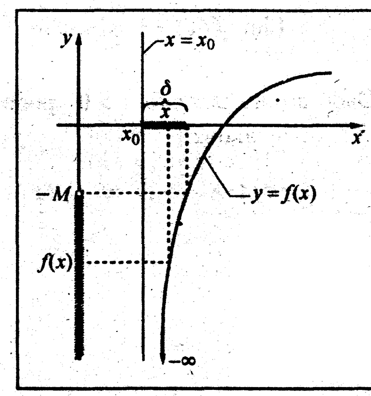


A.3

Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ Dado $M > 0$, $\exists \delta > 0$

tal que: $f(x) < -M$ siempre que:

$$x \in D_f \quad \wedge \quad 0 < x - x_0 < \delta$$

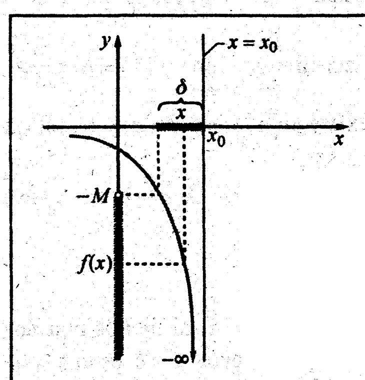


A.4

Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ Dado $M > 0$, $\exists \delta > 0$

tal que: $f(x) < -M$ siempre que:

$$x \in D_f \quad \wedge \quad 0 < x_0 - x < \delta$$



Sí al menos una de las proposiciones A.1, A.2, A.3 ó A.4 es cierto, entonces diremos que $x = x_0$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la gráfica de: $y = f(x)$

(B) ASÍNTOTAS HORIZONTALES - LIMITES CUANDO $X \to +\infty$, $X \to -\infty$

B.1

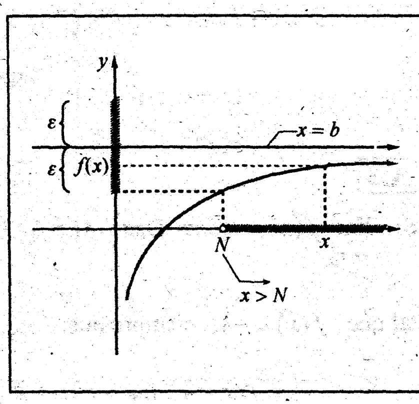
Sea $A \subset I\!R$, A es ilimitado superiormente.

Dada $f : A \to I\!R$, escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{, sí y sólo sí.}$$

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$x \in A \wedge x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

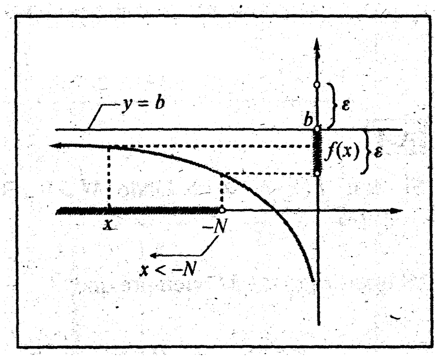


B.2

Dada $f : A \to I\!R$, A es ilimitado inferiormente.

Escribimos: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff$ Dado $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon) > 0$, tal que:

$$x \in A \wedge X < -N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



Por los tanto, sí al menos una de las proposiciones B.1 ó B.2 es verdadero, entonces diremos que la recta $y = b$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** a la gráfica de la función $f(x)$.

B.3

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Entonces se escribe: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ (por pequeña que sea) $\exists N(\varepsilon) > 0$, tal que: $|f(x) - b| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f \wedge |x| > N$.

EJEMPLOS

Ejemplo 1. Demostrar que: $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

Demostración:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \Longleftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ tal que: $\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f \wedge |x| > N$.

Ahora, busquemos N en función de ε:

Para ello, partimos de: $\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{x+1-x+1}{x-1}\right| = \left|\frac{2}{x-1}\right| = 2\frac{1}{|x-1|}$

Pero: $\underbrace{2\frac{1}{|x-1|} < \varepsilon}_{\frac{|x-1|}{2} > \frac{1}{\varepsilon}}$ siempre que $x \in D_f = R - \{1\} \wedge \underbrace{|x| > N}_{x > N \vee x < -N}$

$$|x-1| > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$x - 1 > \frac{2}{\varepsilon} \vee x - 1 < -\frac{2}{\varepsilon}$$

$$x > \underbrace{1 + \frac{2}{\varepsilon}}_{N_1} \vee x' < -\frac{2}{\varepsilon} \quad \text{, donde } x' = x - 1$$

si $x \to +\infty$ si $x \to -\infty$

$N_1 = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$ $N_2 = -\frac{2}{\varepsilon}$

Ejemplo 2. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$

Demostración:

Usar la definición A.1

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty \iff$ Dado $M>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $\frac{1}{x^2-4} > M$ siempre que:

$x \in D_f = \mathbb{R} - \{-2,2\} \;\wedge\; 0 < x-2 < \delta$

Búsqueda de δ en función de M:

Pero: $\underbrace{\frac{1}{x^2-4} > M}$ siempre que $x \in D_f \;\wedge\; 0 < x-2 < \delta$

$\Rightarrow\; x^2 - 4 < \frac{1}{M}$ si $x^2 - 4 > 0$

1) ... $(x-2)\underbrace{(x+2)}_{\text{se debe acotar}} < \frac{1}{M}$

Tenemos que : $0 < x-2 < \delta$ .... (2)

Supongamos : $0 < x-2 < 1 = \delta_1$, $\delta \le \delta_1$

$2 < x < 3$

Sumar 2 : $2 < x+2 < 5$ .... (3)

Multiplicar las desigualdades (2) por (3):

(4) ... $0 < (x-2)(x+2) < 5\delta$

Comparando las desigualdades (1) y (4) hacemos: $5\delta = \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; \delta = \frac{1}{5M}$

Escogemos $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{5M}\right\}$ para que $\frac{1}{x^2-4} > M$ siempre que:

$0 < x-2 < \delta \;\wedge\; x \in D_f$

Ejemplo 3. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x}{x^2-1} = +\infty$

Demostración:

1) Por definición se tiene $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x}{x^2-1} = +\infty \iff$ Dado $M>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que

$\frac{-x}{x^2-1} > M$ siempre que: $0 < 1-x < \delta \;\wedge\; x \in D_f$

Búsqueda de δ en función de M:

A partir de $\frac{-x}{x^2-1}$ sabiendo que $0<1-x<\delta$.

2) De la proposición $\left(\frac{-x}{x^2-1}>M \text{ siempre que } 0<1-x<\delta \wedge D_f=R-\{-1,1\}\right)$

Deducimos:

Si $\underbrace{\frac{-x}{x^2-1}>0}_{\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle0,1\rangle}$ entonces $\underbrace{\frac{x^2-1}{-x}}_{(1-x)\frac{(1+x)}{x}}<\frac{1}{M}$ siempre que $0<1-x<\delta \wedge x\in D_f$

Pero: $\frac{x^2-1}{-x}=\frac{(x-1)(x+1)}{-x}=(1-x)\frac{(x+1)}{x}$

— $\frac{(x+1)}{x}$: este término debe acotarse

— $(1-x)$: este término está acotado por δ, pues $0<1-x<\delta$

Por buscar una cota $N>0$, tal que $\frac{x+1}{x}<N$

Tenemos que $0<1-x<\delta$ .... (1)

Supongamos que $0<1-x<\delta\le\frac{1}{2}=\delta_1$, entonces:

$0<1-x<\frac{1}{2} \Rightarrow 0>x-1>-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1>x>\frac{1}{2} \leftarrow$ Invierto: $1<\frac{1}{x}<2$ .... (2)

Sumo 1: $\Rightarrow 2>x+1>\frac{3}{2}$

$\Longleftrightarrow \frac{3}{2}<x+1<2$ .... (3)

Multiplicar las desigualdades (2) por (3):

$\frac{3}{2}<\frac{x+1}{x}<4=N$ .... (4)

Ahora, multiplicar las desigualdades (1) por (4): $0<(1-x)\frac{(x+1)}{x}<4\delta$

Haciendo: $4\delta=\frac{1}{M} \Longleftrightarrow \delta=\frac{1}{4M}$

Escogemos: $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4M}\right\}$ para que: $\frac{-x}{x^2-1}>M$ siempre que:

$0<1-x<\delta \wedge x\in D_f$

Ejemplo 4. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = -\infty$

Demostración:

1) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = -\infty \iff$ Dado $M>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $\dfrac{1}{x^2-4} < -M$ siempre que:

$0<2-x<\delta \wedge x\in D_f = \mathbb{R}-\{-2,2\}$

Búsqueda de δ en función de M.

2) De la desigualdad $\dfrac{1}{x^2-4} < -M$ podemos deducir lo siguiente:

Si $\underbrace{x^2-4<0}_{x\in\langle -2,2\rangle}$, entonces invertimos: $x^2-4 > -\frac{1}{M}$

$\iff (x-2)(x+2) > -\frac{1}{M}$

Multiplicar por -1 $\iff (2-x)(x+2) < \frac{1}{M}$ .... (*)

Por definición, tenemos que: $0<2-x<\delta$ .... (1)

Supongamos que $\delta=1$, entonces: $0<2-x<1$

$\iff 0 > x-2 > -1$

$\iff 2 > x > 1$

$\iff 1 < x < 2$

Sumar 2: $\iff 3 < x+2 < 4$ .... (2)

Multiplicar las desigualdades (1) por (2):

$0<(2-x)(x+2)<4\delta$ .... (3)

Comparando (*) con (3) hacemos: $4\delta = \frac{1}{M} \iff \delta = \frac{1}{4M}$ y escogemos $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{4M}\right\}$

para que: $\dfrac{1}{x^2-4} < -M$ siempre que: $0<2-x<\delta \ \wedge\ x\in D_f$

Ejemplo 5. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-4}{(x-2)^2} = -\infty$

Demostración:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-4}{(x-2)^2}=-\infty \iff$ Dado $M>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que:

$$\left(0<\underbrace{|x-2|}<\delta \quad\wedge\quad x\in D_f=\mathbb{R}-\{2\} \text{ implica que } \frac{x-4}{(x-2)^2}<-M\right)$$

Este valor absoluto es porque el límite por derecha e izquierda de -2, es $-\infty$

Búsqueda de δ en función de M:

A la derecha de 2, debo demostrar que:

Si $0<x-2<\delta \quad\wedge\quad x\in D_f=\mathbb{R}-\{2\} \quad\Rightarrow\quad \frac{x-4}{(x-2)^2}<-M$

Veamos:

De $\frac{x-4}{(x-2)^2}<-M$ deducimos: Si $\underbrace{x-4<0}_{x<4}$, invierto $\frac{(x-2)^2}{x-4}>-\frac{1}{M}$

Multiplicar por -1: $\frac{(x-2)^2}{-(x-4)}<\frac{1}{M}$ .... (*)

Pero $0<x-2<\delta$ implica que $0<(x-2)^2<\delta^2$ .... (1)

Si $\delta=1 \Rightarrow 0<x-2<1 \iff 2<x<3$

Sumar -4: $\Rightarrow -2<x-4<-1$

Multiplicar por -1 : $\Rightarrow 2>-(x-4)>1$

Invierto: $\Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{-(x-4)}<1$ .... (2)

Multiplicar (1) por (2) : $\Rightarrow 0<\frac{(x-2)^2}{-(x-4)}<\delta^2$ .... (3)

Comparando (*) con (3) hacemos: $\delta^2=\frac{1}{M} \iff \delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

Escoger $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{1}{\sqrt{M}}\right\}$ para que: $\frac{x-4}{(x-2)^2}<-M$. siempre que:

$0<x-2<\delta \quad\wedge\quad x\in D_f$

Ejemplo 6. Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$

Demostración:

$\Longleftrightarrow$ Dado $M > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\frac{x}{x^2-1} > M$ siempre que

$0 < x - 1 < \delta \quad \wedge \quad x \in D_f = I\!R - \{-1, 1\}$

Búsqueda de δ en Función de M:

Pero $\frac{x}{x^2-1} > M \iff \frac{x^2-1}{x} < \frac{1}{M}$ .... (*) Si $\underbrace{\frac{x}{x^2-1} > 0}_{x \in \langle -1,0\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle}$

Se tiene: $\frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$ tenemos: $0 < x - 1 < \delta$ .... (1)

Si $\delta = 1 \Rightarrow 0 < x - 1 < 1 \iff 1 < x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$ .... (2)

En $1 < x < 2$ sumar 1 $\iff 2 < x + 1 < 3$ .... (3)

Multiplicar (1) × (2) × (3): $0 < \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 3\delta$ .... (4)

Comparando (4) con (*) hacemos: $3\delta = \frac{1}{M} \Rightarrow \delta = \frac{1}{3M}$

Escoger: $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{3M}\right\}$.

❐ 3.11.4 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

TEOREMA 1 Sea $A \subset I\!R$, $f : A \longrightarrow I\!R$, x_0 punto de acumulación de $A = D_f$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$$

Es decir, si alguno de los límites existe entonces, el otro límite también existe y:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$$

<u>Demostración</u>:

$(\iff)$ Por demostrar que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L \ \wedge$

<u>Veamos</u>: $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$(\Rightarrow)$

1) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$; tal que:

$$x \in D_f \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ 0 < |f(x) - L| < \varepsilon$$

2) Hagamos: $x - x_0 = h$

$\iff x = x_0 + h$; donde si $x \to x_0$ entonces $h \to 0$.

3) Sustituir 2) en 1), podemos ver que siempre que:

$$h \in Dom(f(x_0 + x)) \ \wedge \ \underbrace{0 < |h| < \delta}_{*} \ \Rightarrow \ \underbrace{0 < |f(x_0 + h) - L| < \varepsilon}_{**}$$

4) Las desigualdades (*) y (**) implican que: $\lim_{h \to 0} f(x_0 + x) = L$

$(\Leftarrow)$ Por demostrar: Sí $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Queda como ejercicio……

LEMA Si $|a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$ entonces $a = 0$.

Demostración:

La demostración la haremos por el método de **REDUCCIÓN AL ABSURDO**. Este método se basa en la siguiente tautología lógica:

$$[(p_1 \wedge p_2) \;\Rightarrow\; q] \equiv [(\sim q \wedge p_2) \;\Rightarrow\; \sim p_1]$$

Donde: $p_1 : 1 < 2$ $\quad q : a = 0$

$p_2 : |a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$

1) Supongamos que $\underbrace{a \neq 0}_{\sim q}$, entonces $\frac{|a|}{2} > 0$ (Hipótesis Auxiliar)

2) Como la proposición p_2 es verdadero para todo ε positivo, en particular será verdadero para $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.

Entonces en p_2 tendremos: $|a| < \frac{|a|}{2}$

$\Rightarrow \; 2 < 1$

Esta proposición contradice la hipótesis p_1

Esta contradicción surge por negar la tesis.

3) Por lo tanto: $|a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$ implica $a = 0$.

TEOREMA 2 (UNICIDAD DEL LIMITE) (Si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, éste es único)

Sean $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$, x_0 punto de acumulación de A.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1 \;\wedge\; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Demostración:

Debo probar $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, lo cual implica $L_1 = L_2$

1) Por hipótesis se tiene $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1 \;\wedge\; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$

Luego, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que para

$x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y

$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

2) Elegir $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como x_0 es punto de acumulación de A podemos encontrar $x' \in A$ tal que $0 < |x' - x_0| < \delta$. Entonces:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x') + f(x') - L_2| &\leq |L_1 - f(x')| + |f(x') - L_2| \\ &= |f(x') - L_1| + |f(x') - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

4) Por tanto, por el Lema anterior: $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\Rightarrow$ $L_1 - L_2 = 0$ $\Rightarrow$ $L_1 = L_2$

APLICACIONES PRÁCTICAS DEL TEOREMA 1

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$$

1) Calcular: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$

Solución:

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(a + h) - \cos a}{h} \text{, hemos hecho: } x - a = h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos a \cdot \overbrace{\cos h}^{1} - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} h - \cos a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} h}{h} = -\operatorname{sen} a$$

Pues: $\lim\limits_{h \to 0} (\cos a \cos h - \cos a) = 0$

2) Calcular: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$

Haciendo : $x-1=h \iff x=1+h$

Donde : Si $x\to 1 \Rightarrow h\to 0$

Tenemos : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}\pi x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-(1+h)^2}{\operatorname{sen}\pi(1+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-1-2h-h^2}{\operatorname{sen}\pi\cos\pi h+\cos\pi\operatorname{sen}\pi h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h(2+h)}{\operatorname{sen}\pi h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\pi h}{\operatorname{sen}\pi h}\left(\frac{-(2+h)}{\pi}\right)=1\left(\frac{-2}{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi}.$$

3) Calcular: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\operatorname{sen}x}$

Haciendo : $x-\pi=h \iff x=\pi+h$

Donde : Si $x\to\pi \Rightarrow h\to 0$

Tenemos : $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\operatorname{sen}(\pi+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0}\cos h+\underbrace{\cos\pi}_{-1}\operatorname{sen}h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-\operatorname{sen}h}=-1$$

TEOREMA 3 . **(TEOREMA DEL ENCAJE) (del Sandwich)**

Sean $A\subset I\!R$; $f,g,h: A\to I\!R$, x_0 punto de acumulación de A.

Si para todo $x\in A$, $x\neq x_0$ tenemos $f(x)\le g(x)\le h(x)$ y además

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$.

<u>Demostración:</u>

1) Por hipótesis se tiene $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$, por tanto dado $\varepsilon>0$, existen δ_1 y δ_2 tales que para $x\in A$.

$$0<|x-x_0|<\delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x)-L|<\varepsilon$$
$$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$$

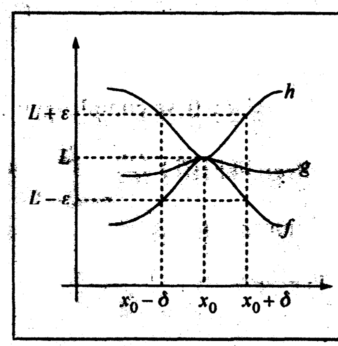
$$\text{y}\quad 0<|x-x_0|<\delta_2 \;\Rightarrow\; |h(x)-L|<\varepsilon$$
$$L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$$

2) Sea $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$. Entonces, $x\in A \;\wedge\; 0<|x-x_0|<\delta$ implica:

$$L-\varepsilon<f(x)\leq g(x)\leq h(x)<L+\varepsilon$$

y por tanto: $L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \quad |g(x)-L|<\varepsilon$



Lo cual implica que: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$

Este teorema indica que si $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$

Entonces:
$$\underbrace{\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{L} \leq \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x)}_{\lim\limits_{x\to x_0}} \leq \underbrace{\lim_{x\to x_0} h(x)}_{L}}_{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L}$$

TEOREMA 4

Sea $A\subset I\!R$, $f:A\to I\!R$, x_0 punto de acumulación de $A=D_f$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \;\wedge\; a<L<b$

Entonces existe un número $\delta>0$, tal que: $a<f(x)<b$, $\forall\, x\in D_f$ que satisfaga $a<|x-x_0|<\delta$.

Demostración:

1) Por hipótesis tenemos que:

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \;\Rightarrow\;$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$; tal que:

(*) .... $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $x\in D_f \;\wedge\; 0<|x-x_0|<\delta$

2) De (*) se obtiene: $|f(x)-L|<\varepsilon \iff -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$

$$\iff \boxed{L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon} \qquad \text{(a)}$$

3) Además por hipótesis se tiene que: $a<L<b$

$$\iff a<L \ \wedge \ L<b$$

$$\iff L-a>0 \ \wedge \ b-L>0$$

Si tomamos: $\varepsilon=\min\{b-L, L-a\}$

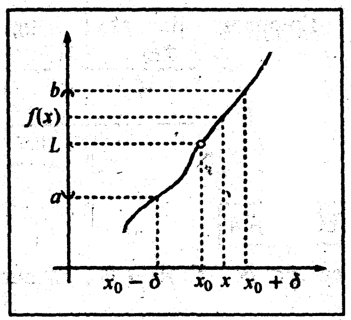
Entonces se cumplirá que: $\varepsilon \le b-L \ \wedge \ \varepsilon \le L-a$

$$\boxed{\varepsilon+L\le b \ \wedge \ a\le L-\varepsilon} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha)$$

4) Pero $\forall\, \varepsilon>0$ se cumple que: $\boxed{L-\varepsilon<L<L+\varepsilon}$ ……………………… (β)

Luego por (α) y (β) se obtiene: $\boxed{a\le L-\varepsilon<L<L+\varepsilon\le b}$ …………… (b)

5) Comparando las desigualdades (a) y (b) y por la propiedad de transitividad, obtenemos:



$$a\le L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon\le b$$

$$\Rightarrow \ a<f(x)<b, \ \forall\, x\in D_f \ \wedge \ 0<|x-x_0|<\delta$$

lqqd.

ALGUNOS LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

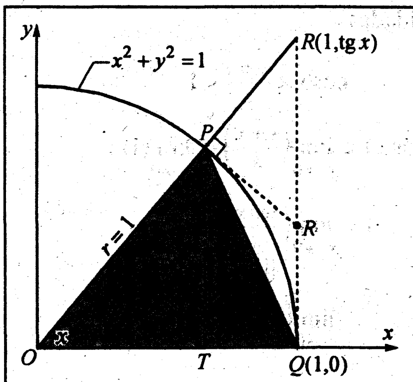
TEOREMA 5 Probar que: (1) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x=0$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

Demostración:

La demostración es por construcción.

Se elige un círculo trigonométrico: $x^2+y^2=1$

En el primer cuadrante se definen: la cuerda PQ, el arco $\widehat{PQ}$ y la línea poligonal $(\overline{PR})\cup(\overline{RQ})$.



$P=(\cos x,\text{sen}\,x)$

Si comparamos las medidas de estos elementos, se obtienen las desigualdades:

$PQ < x < PR + RQ$ .... (1)

donde: x es la medida del arco $\overset{\frown}{PQ}$ en radianes, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$

- En el triángulo rectángulo RPS se cumple:

  $PR < SR$ .... (2)

- En el triángulo rectángulo QTP, se tiene:

  $PQ > PT$ .... (3)

Así, por (1), (2) y (3) y por transitividad se obtiene:

$PT < PQ < x < SR + RQ$

$PT < PQ < x < SR$ .... (4)

- En el círculo trigonométrico, se tiene:

  $PQ = \sqrt{PT^2 + TQ^2} = \sqrt{2-2\cos x}$, donde $PT = \text{sen}\,x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

  $TQ = 1 - OT$, $OT = \cos x$

  $SQ = \text{tg}\,x$

- Al sustituir en (4):

$$\text{sen}\,x < \sqrt{2-2\cos x} < x < \text{tg}\,x$$

De: $\sqrt{2-2\cos x} < x$

$2 - \cos x < x^2$

$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$ ...... (5)

De: $\text{sen}\,x < x < \text{tg}\,x$

$\text{sen}\,x < x$ por $\frac{1}{x}$: $\frac{\text{sen}\,x}{x} < 1$ ...... (6)

$x < \text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ por $\frac{\cos x}{x}$: $\frac{\text{sen}\,x}{x} < 1$ ...... (7)

- Con (5), (6) y (7) se obtiene: $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\text{sen}\,x}{x} < 1$ .... (8)
- La desigualdad (8), también, se cumple para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

- En (8) aplicar el teorema del encaje, a las desigualdades:

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1 \qquad\qquad \cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)<\lim_{x\to 0}(\cos x)<\lim_{x\to 0}(1) \qquad \lim_{x\to 0}(\cos x)<\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)<\lim_{x\to 0}(1)$$

$$1<\lim_{x\to 0}(\cos x)<1 \qquad\qquad 1<\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)<1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)=1$$

- De manera similar, para $0<x<\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}<x<0$

  Se cumplen: $0<\operatorname{sen} x<x \quad \wedge \quad 0<\operatorname{sen}(-x)<-x$

  Lo que es equivalente a: $0<|\operatorname{sen} x|<|x|$

  Hallar $\lim_{x\to 0}$: $\lim_{x\to 0}(0)<\lim_{x\to 0}|\operatorname{sen} x|<\lim_{x\to 0}|x|$

- Conclusión: $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x=0$

LIMITE DE UNA SUMA, DE UN PRODUCTO Y DE UN COCIENTE

TEOREMA 6 Sean $A\subset I\!R$, x_0 punto de acumulación de A y $f,g:A\to I\!R$.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=m$ entonces:

1) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\operatorname{Lim}_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=L+m$

2) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=[\lim_{x\to x_0} f(x)][\lim_{x\to x_0} g(x)]=1m$

3) Si $m\neq 0$, entonces $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g}\right](x)=\frac{1}{m}$

DEMOSTRACIÓN DE (1)

Para todo $\varepsilon>0$ debemos demostrar que $\exists\,\delta>0$, tal que: $|(f+g)(x)-(1+m)|<\varepsilon$ siempre que $x\in A \quad \wedge \quad 0<|x-x_0|<\delta$.

1) Por propiedad triangular se tiene:

$|(f+g)(x)-(1+m)| = \left|(f(x)-1)+(g(x)-m)\right| \leq |f(x)-1| + |g(x)-m|$ .... (*)

2) Por hipótesis tenemos:

a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1 \Rightarrow$ Dado $\varepsilon_1>0,\ \exists\,\delta_1 / |f(x)-1|<\varepsilon_1$ siempre que:

$x\in A \quad \wedge \quad 0<|x-x_0|<\delta_1$

b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m \Rightarrow$ Dado $\varepsilon_2>0,\ \exists\,\delta_2 / |g(x)-m|<\varepsilon_2$ siempre que:

$x\in A \quad \wedge \quad 0<|x-x_0|<\delta_2$

3) Como ε_1 y ε_2 son arbitrarios, entonces: haciendo $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$ y escogiendo $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$ podemos "acotar" en el paso (1*) del siguiente modo:

$|(f+g)(x)-(1+m)| \leq |f(x)-1| + |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Siempre que $x\in A \quad \wedge \quad 0<|x-x_0|<\delta$

DEMOSTRACIÓN DE (2)

Dado $\varepsilon>0$ debo demostrar que existe $\delta>0$ tal que
$x\in A \quad \wedge \quad 0<|x-x_0|<\delta$ implica $|(fg)(x)-1m|<\varepsilon$.

1) De: $|(fg)(x)-1m| = |f(x)g(x)-g(x)1+g(x)1-1m|$ .... Sumar y restar $g(x)1$

$= |g(x)(f(g)-1)+1(g(x)-m)|$

$\leq |g(x)(f(x)-1)| + |1(g(x)-m)|$ .... Prop. triangular.

$= \boxed{|g(x)||f(x)-1| + |1||g(x)-m|}$ ...... (*)

2) Debemos acotar los términos: $|g(x)|$, $|f(x)-1|$, $|1|$ y $|g(x)-m|$ de tal modo que se cumpla la proposición: $|fg-1m|<\varepsilon$.

<u>Veamos</u>:

a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m \Rightarrow$ dado $\varepsilon_1>0$, $\exists\,\delta_1>0$ tal que $x\in A \quad \wedge \quad 0<|x-x_0|<\delta_1$ implica que $|g(x)-m|<\varepsilon$.

Como esta proposición es verdadero para todo $\varepsilon_1 > 0$, en particular será verdadero para $\varepsilon_1 = 1$. Luego:

$$|g(x) - m| < 1 \Rightarrow |g(x)| - |m| \leq |g(x) - m| < 1$$
$$\Rightarrow |g(x)| - |m| < 1, \text{ pues } |g - m| \geq |g| - |m|$$
$$\Rightarrow |g(x)| < |m| + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

b) Ahora, la cota de $|f(x) - 1|$ podemos hallar en función de $(|m| + 1)$

Veamos:

$\exists\, \delta_2 > 0$, tal que $\boxed{|f(x) - 1| < \frac{1}{2(|m|+1)}\varepsilon}$ .... (ii)

Siempre que: $x \in A \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2$.

c) Además: $\boxed{|1| < |1| + 1}$ .... (iii) $\forall\, 1 \in I\!R$

Ahora, la cota de $|g(x) - m|$ podemos hallar en función de $(|1| + 1)$, afirmando que: existe un δ_3, tal que $\boxed{|g(x) - m| < \frac{1}{2(|1|+1)}\varepsilon}$ .... (iv)

Siempre que: $A \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta_3$.

3) Podemos concluir, afirmando que si escogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y acotando el término en (1*) por las cotas de i, ii, iii y iv ; que:

$$|g(x)||f(x) - 1| + |1||g(x) - m| \leq (|m| + 1)\frac{1}{2(|m|+1)}\varepsilon + (|1| + 1)\frac{1}{2(|1|+1)}\varepsilon = \varepsilon$$

Siempre que $x \in A \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta$.

DEMOSTRACIÓN DE 3)

Dado $\varepsilon > 0$, debo demostrar que $\exists\, \delta > 0$, tal que: $\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_{\frac{1}{g}} \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

1) Se tiene:

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m - g(x)}{mg(x)}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|m||g(x)|} = \frac{1}{|m|}\frac{1}{|g(x)|}|g(x) - m| \quad \ldots\ldots \quad (1^*)$$

2) Ahora debemos acotar las funciones: $\frac{1}{|g(x)|}$ y $|g(x)-m|$. Es decir, debemos hallar las cotas $M>0$ y $K>0$, tal que: $\frac{1}{|g(x)|}<M \quad \wedge \quad |g(x)-m|<K$

Por hipótesis tenemos:

Sí $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m \;\Rightarrow$ dado $\varepsilon_1>0$, $\exists\, \delta_1>0$ tal que para:

$x\in A \;\wedge\; 0<|x-x_0|<\delta_1 \;\Rightarrow\; \boxed{|g(x)-m|<\varepsilon_1}$ .... (2*)

Para acotar la función $\frac{1}{|g(x)|}$ hagamos $\varepsilon_1=\frac{|m|}{2}$ en (2*), entonces tendremos que:

$|g(x)-m|<\frac{|m|}{2}$, $m\neq 0$.

$|m-g(x)|<\frac{|m|}{2}$ .... Propiedad: $|a-b|=|b-a|$

Pero: $|m|-|g(x)|\leq|m-g(x)|<\frac{|m|}{2}$ .... Propiedad: $|a|-|b|\leq|a-b|$

Entonces: $|m|-|g(x)|<\frac{|m|}{2}$

Multiplicar por -1: $\Rightarrow\; -|m|+|g(x)|>-\frac{|m|}{2}$

$$|g(x)|>-\frac{|m|}{2}+|m|$$

Invertir: $|g(x)|>\frac{|m|}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|m|}$ .... (B)

3) En consecuencia, volviendo al paso (1*) y acotando según (B) tendremos:

$\frac{1}{|m|}\frac{1}{|g(x)|}|g(x)-m|<\frac{1}{|m|}\frac{2}{|m|}|g(x)-m|$ .... (3*)

4) Retornando al paso (2*) podemos elegir adecuadamente que para todo: $\varepsilon_2=\frac{|m|^2}{2}\varepsilon$, $\varepsilon>0$ existe un $\delta_2>0$; tal que: $|g(x)-m|<\frac{|m|^2}{2}\varepsilon=\varepsilon_2$

Siempre que: $x\in A \;\wedge\; 0<|x-x_0|<\delta_2$

5) Por tanto, si nuevamente acotamos en el paso (3*), tendremos:

$$\frac{1}{|m|}\frac{1}{|g(x)|}|g(x)-m| < \frac{1}{|m|}\frac{2}{|g(x)|}|g(x)-m| < \frac{1}{|m|}\frac{2}{|m|}\frac{|m|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon \text{ ó sea que: } \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$$

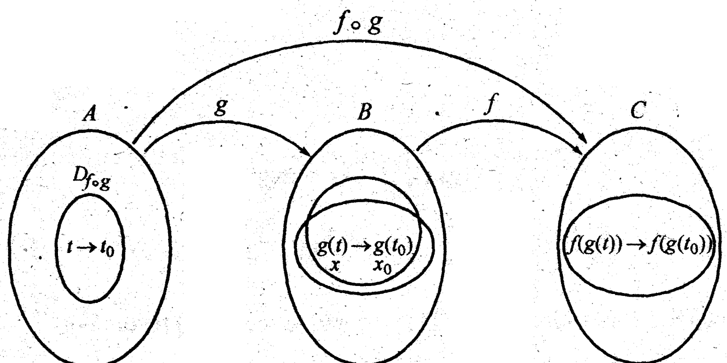
Siempre que: $x \in D_{\frac{1}{g}} \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

Siendo: $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$

LIMITE DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

TEOREMA 7 Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$.

Si t_0 es punto de acumulación del $D_{f \circ g}$ $\wedge$ Si $\exists$ un número $c > 0$, tal que, $g(t) \neq x_0$ siempre que $0 < |t - t_0| < c$ entonces: $\lim\limits_{t \to t_0}(f \circ g)(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(g(t)) = L$



Demostración:

1) Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ un $\delta_1 > 0$, tal que

(i) .... $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1$

2) Pero si $x \in D_f \Rightarrow \exists$ un $t \in D_g$, tal que, $\boxed{x = g(t)}$ .... (ii)

3) Ahora podemos reemplazar (ii) en (i):

$$|f(g(t))-L|<\varepsilon \text{ s.q. } \underline{g(t)\in D_f} \wedge 0<|g(t)-x_0|<\delta_1$$

4) Por hipótesis tenemos:

Si $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$, entonces $\exists$ un $\delta_2>0$; tal que: $|g(t)-x_0|<\varepsilon_1$ siempre que $t\in D_g \wedge 0<|t-t_0|<c$.

5) Pero si tomamos: $\begin{cases} \varepsilon_1=\delta_1 \text{ , porque } \varepsilon_1 \text{ es arbitrario} \\ \delta=\min\{c,\delta_2\} \end{cases}$. Se tiene en (iii).

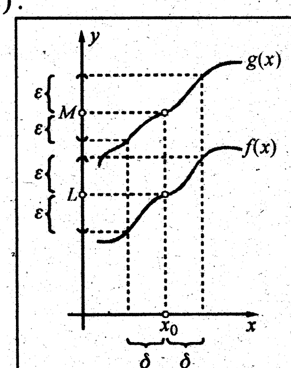
6) $|g(x)-x_0|<\delta_1$ siempre que: $\underline{t\in D_g} \wedge 0<|t-t_0|<\delta$

7) Combinando las relaciones de 5) con 6) se tiene: $|f(g(t))-L|<\varepsilon$

Siempre que $\underbrace{t\in D_g \wedge g(t)\in D_f}_{t\in D_{f\circ g}} \wedge 0<|t-t_0|<\delta$

Esto implica que: $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=L}$

TEOREMA 8 Sean $A\subset I\!R$, x_0 un punto de acumulación de $A, f, g: A\to I\!R$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ con $L<M$ entonces existe $\delta>0$ tal que $x\in A$, $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<g(x)$.



__Demostración:__

Como $L<M \Rightarrow M-L>0$.

Basta tomar $\varepsilon=\dfrac{M-L}{2}$ entonces se cumple

$L+\varepsilon=\dfrac{L+M}{2}=M-\varepsilon$.

Existe $\delta>0$ tal que:

$x\in A \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\in\langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$

y $g(x)\in\langle M-\varepsilon, M+\varepsilon\rangle$, donde $f(x)<\dfrac{L+M}{2}<g(x)$

COROLARIO 1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.

Demostración:

Como $L > 0$, basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}$

COROLARIO 2. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in A$, $x \neq x_0$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ entonces $L \leq M$.

TEOREMA 9 Sea $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$, x_0 punto de acumulación de A. Para que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, es necesario y suficiente que se tenga $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ para toda sucesión de puntos $x_n \in A - \{x_0\}$, tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES CONTINUAS

❒ 4.0 INTRODUCCIÓN

Para investigar la continuidad de una función en el punto x_0, se requiere saber sólo dos cosas: 1° que x_0 pertenezca al dominio de la función f, y

2° que $f(x_0)$ sea igual al límite de f en x_0.

La existencia del límite de f en x_0 es resultado de la existencia de los límites laterales en x_0 y que dichos límites laterales sean iguales.

❒ 4.1 LÍMITES LATERALES

LÍMITE LATERAL POR LA DERECHA

Definición: Dada una función $f: D_f \to \mathbb{R}$, si "x_0" es punto de acumulación de $D_f \cap \langle x_0, \infty \rangle$; entonces:

El límite de f cuando x tiende a "x_0" por la derecha es "L" s.s.s. para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f \;\wedge\; 0 < x - x_0 < \delta$.

SIMBOLIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) \text{ tal que:}$$

$$x \in D_f \;\wedge\; 0 < x - x_0 < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

LÍMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA

Definición: Dada la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, si "x_0" es punto de acumulación de $D_f \cap \langle -\infty, x_0 \rangle$; entonces:

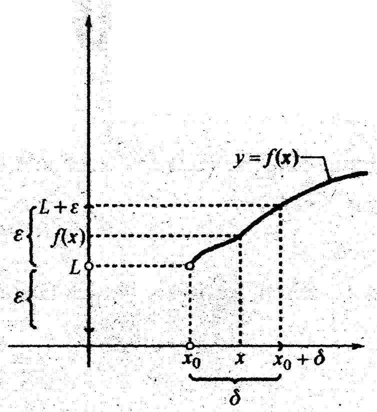
El límite de f cuando x tiende hacia "x_0" por la izquierda es "L" s.s.s. para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que: $x \in D_f \;\wedge\; 0 < x_0 - x < \delta$

SIMBOLIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN

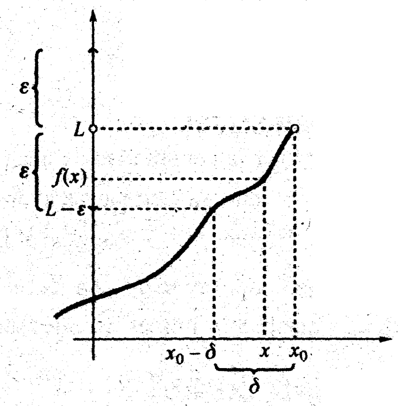
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) \text{ tal que:}$$

$$x \in D_f \;\wedge\; 0 < x_0 - x < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

ILUSTRACIÓN GRAFICA DE LIMITE LATERAL



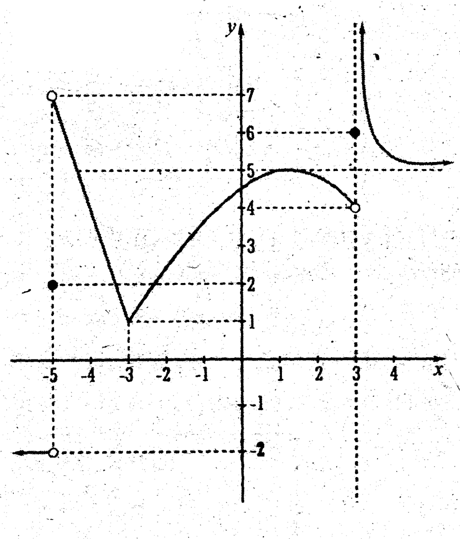
LÍMITE A LA DERECHA DE x_0



LÍMITE A LA IZQUIERDA DE x_0

Ejemplo 1. Aclaremos a existencia de los límites laterales eligiendo el siguiente ejemplo. Sea la función $f(x)$ definida del siguiente modo.

$$f(x)=\begin{cases} -2 & , \quad x<-5 \\ 2 & , \quad x=-5 \\ -3x-8 & , \quad -5<x\leq -3 \\ -\frac{1}{4}(x-1)^2+5 & , \quad -3<x<3 \\ 6 & , \quad x=3 \\ \frac{4}{x-3}+6 & , \quad x>3 \end{cases}$$



Mirando la gráfica de $f(x)$ y luego la regla de correspondencia de f, hallemos los límites laterales en los puntos: -5, -3 y 3.

a) Mirando la gráfica, en el punto $x=-5$, obtenemos: el límite de la función $f(x)$ por la izquierda de $x=-5$, es -2.

- Ahora mirando la regla de correspondencia de $f(x)$, obtenemos:

$$\lim_{\substack{x\to -5^+ \\ x<-5}} f(x) = \lim_{x\to -5}[-2] = -2$$

b) Mirando la gráfica, en el punto $x=-5$, el límite de $f(x)$ por la derecha de $x=-5$, es 7.

- Ahora, mirando la regla de correspondencia de $f(x)$ obtenemos:

$$\lim_{\substack{x\to -5^+ \\ x>-5}} f(x) = \lim_{x\to 5}[-3x-8] = -3(-5)-8 = 7$$

En $x=-3$

c) Mirando la gráfica: el límite por la izquierda de $x=-3$ es 1.

- Mirando la regla de correspondençia de $f(x)$, tenemos:

$$\lim_{\substack{x\to -3^- \\ x<-3}} f(x) = \lim_{x\to -3}(-3x-8) = -3(-3)-8 = 1$$

d) Mirando la gráfica: el límite de $f(x)$ por la derecha de -3 es 1.

- Mirando la regla de correspondencia de $f(x)$, se tiene:

$$\lim_{\substack{x\to -3^+ \\ x>-3}} f(x) = \lim_{x\to -3}\left[-\frac{1}{4}(x-1)^2+5\right] = -\frac{1}{4}(-3-1)^2+5 = 1$$

En $x=3$

e) Mirando la gráfica de $f(x)$, el límite de $f(x)$ por la izquierda de $x=3$, es 4.

- Ahora, observe la regla de correspondencia de $f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} f(x) = \lim_{x\to 3}\left[-\tfrac{1}{4}(x-1)^2+5\right] = -\tfrac{1}{4}(3-1)^2+5=4$$

f) Mirando la gráfica de $f(x)$, el límite de $f(x)$ por la derecha de $x=3$, no existe, porque $f(x)$ se aleja $+\infty$.

- Ahora, hagamos el cálculo en la regla de correspondencia de $f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3 \\ x-3>0}} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{4}{x-3}+6\right] = \frac{4}{+(3-3)}+6=+\infty+6=+\infty$$

TEOREMA DE LA UNICIDAD DEL LÍMITE Una función no puede tender a dos límites diferentes en un punto x_0.

Es decir, sí $\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \;\wedge\; \lim_{x\to x_0^-} f(x)=M \;\Rightarrow\; L=M}$

Se lee "si el límite por la derecha de x_0 existe y el límite por la izquierda de x_0 existe, y son iguales, afirmamos que existe el límite en x_0"

Ejemplo 2. Dada la función $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$, $x\neq 2$

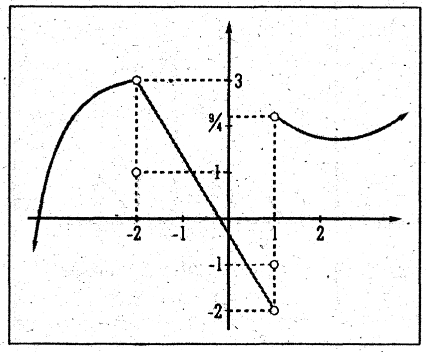
¿existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

Respuesta.- a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x>2 \\ x-2>0}} \frac{(x-2)}{x-2}=1$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x<2 \\ x-2<0}} \frac{-(x-2)}{x-2}=-1$

Los límites laterales existen y son diferentes, por tanto, no existe límite en $x=2$.

Ejemplo 3. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:



$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x = -2 \\ -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3 \ , & x < -2 \\ -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \ , & -2 < x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-2)^2 + 2 \ , & x > 1 \\ -1 \ , & x = 1 \end{cases}$$

En $f(x)$, estudiaremos si existe límite en $x_0 = -2$ y en $x_1 = 1$.

VEAMOS:

<u>**LÍMITES LATERALES EN**</u> $x_0 = -2$

i) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \left(-\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \right)$

$= -\frac{5}{3}(-2) - \frac{1}{3} = 3$

ii) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \left(-\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3 \right)$

$= 0 + 3 = 3$

Por tanto, existe límite en: $x_0 = -2$

Porque los límites laterales en -2 existen y son iguales, afirmamos que existe límite en -2.

<u>**LÍMITES LATERALES EN**</u> $x_1 = 1$

i) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{1}{4}(x-2)^2 + 2 \right)$

$= \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$

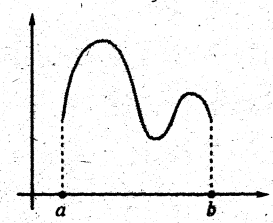
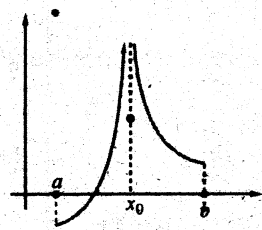
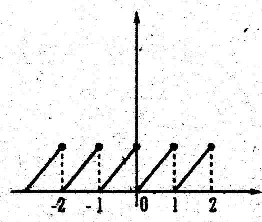
ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(-\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \right) = -2$

En consecuencia, no existe limite en: $x_1 = 1$

Porque, los límites laterales existen y son diferentes, afirmamos que no existe límite en 1.

❐ 4.2 FUNCIONES CONTINUAS

La idea de función continua es un tema central de la topología (estudio de las propiedades intrínsecas de las configuraciones espaciales). Si una función $f: I \to \mathbb{R}$ es una curva o una recta que no se rompe en ningún punto de I, diremos que f es continua en I. Si se rompe en un punto $x_0 \in I$, diremos que f es discontinua en x_0.

$f:[a,b]\to I\!R$	$f:[a,b]\to I\!R$	$f: I\!R\to[0,1],\ f(x)=x-[\![x]\!]$
		
f es continua en $[a,b]$	f es discontinua en x_0	f es discontinua en cada número entero

Definición 1 La función $f:D_f\to I\!R$ es continua en el punto x_0, con $x_0\in D_f$, sí y sólo sí para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$, tal que:

$x\in D_f \quad \wedge \quad |x-x_0|<\delta$ implica $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

DEFINICIÓN SIMBÓLICA

La función f es continua en $x_0\in D_f \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$, tal que:

$$x\in D_f \quad \wedge \quad |x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Definición 2 La función $f:D_f\to I\!R$ es continua en el punto $x_0\in D_f$ sí, y sólo sí se cumplen las 3 condiciones siguientes:

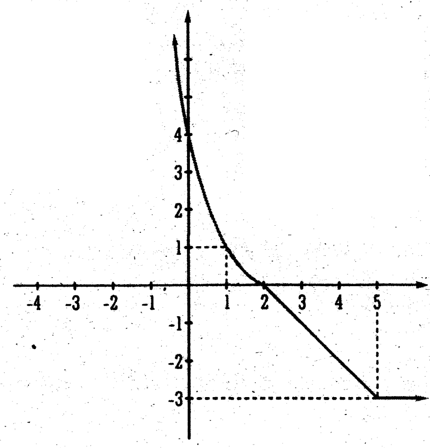
1) Sí $\boxed{f(x_0)\text{ Existe}}$ Esto quiere decir dos cosas $\begin{cases}1^{\circ})\ x_0\in D_f\\ 2^{\circ})\ f(x_0)\in I\!R\end{cases}$

2) Sí $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\text{ Existe}}$ Es decir $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

3) Sí $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$ Esto quiere decir que $f(x_0)$ coincide con el límite.

Sí una o más de estas tres condiciones no se cumplen para x_0, entonces se dice que $f(x)$ es **DISCONTINUA EN** x_0.

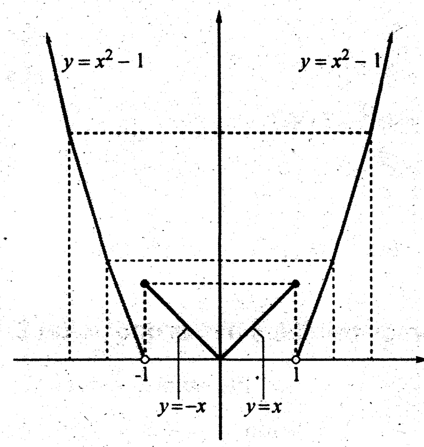
IDEA INTUITIVA DE LA CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD: Decir que una función $f: I \to I\!R$ es continua en I, intuitivamente implica que el gráfico de la función es ininterrumpido. Es decir la función no tiene **SALTOS** o **ROTURAS** en ningún punto de su dominio. Ver fig. 1.
Decir que una función es discontinua en un punto $x_0 \in D_f$, intuitivamente quiere decir, que la gráfica de la función tiene un "salto" o "rotura" en x_0. Ver fig. 2



Sea la función $g: I\!R \to I\!R$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & , \ x<2 \\ -x+2 & , \ 2 \le x < 5 \\ -3 & , \ x \ge 5\end{cases}$$

En este ejemplo, $g(x)$ es continua en todo su dominio: $\text{Dom}(g) = I\!R$



Sea la función $f(x): I\!R \to I\!R$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}|x| & , \ |x| \le 1 \\ x^2-1 & , \ |x|>1\end{cases}$$

En este ejemplo, $f(x)$ es discontinua en:

$$x=-1 \ \text{ y } \ x=1$$

❑ 4.3 PROPOSICIONES BÁSICAS PARA IDENTIFICAR FÁCILMENTE LA CONTINUIDAD O DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

PROPOSICIÓN 1 Todas las funciones polinómicas de grado n.

$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n+1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_n \neq 0$; son continuas en todo $I\!R$.

PROPOSICIÓN 2 Las funciones racionales $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ son discontinuas en los valores reales de x que anulan el denominador.

Esto es, $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ es discontinua en todo $x \in \mathbb{R}$, tal que, $Q(x)=0$.

Ejemplos relativos a la proposición 1.

$f(x)=5$	Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$
$f(x)=2x+5$	Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$
$f(x)=4x^2-2x+3$	Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$
$f(x)=x^3-2$	Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$
$\vdots$	
$f(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1 x+b_0$	Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$

Ejemplos relativos a la proposición 2.

$f(x)=\frac{1}{x}$ es discontinua en $x=0$; porque f no está definido en "0". Además $\lim\limits_{\substack{x\to x^+\\ x>0}} f=+\infty$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f=-\infty$.

$f(x)=\frac{1}{x+1}$ es discontinua en $x=-1$; porque f no está definida en -1. Además $\lim\limits_{x\to -1^+} f=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} f=-\infty$.

$f(x)=e^{\frac{2}{x+2}}$ es discontinua en $x=-2$, porque f no está definida en -2. Además $\lim\limits_{x\to -2^+} f=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^-} f=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$$

En este caso f está definido en 2, porque $f(2)=0$. Pero no es continua en 2, porque $\lim\limits_{x\to 2} f=4$ y $f(2)=0$, son diferentes.

$f(x)=\frac{x}{x^2-9}$ es discontinua en $x=\pm 3$, porque f no esta definida en $x=3$ y no está definido en $x=-3$.

$f(x)=\frac{x}{|x|}$ es discontinuo en $x=0$; porque f no está definida en $x=0$.

Nota: Estudiar la continuidad de una función $f(x)$ en un punto x_0 tiene objeto, sólo cuando $f(x)$ está definido en x_0.

❑ 4.4 PROBLEMAS RELATIVOS A LÍMITES LATERALES

4.4.1. FUNCIONES ALGEBRAICAS

En cada una de las siguientes funciones estudiar los límites laterales en cada uno de los puntos frontera de su dominio.

1) $f(x)=\begin{cases} -x+2 \ , \ x>2 \\ (x-2)^2 \ , \ x<2 \end{cases}$

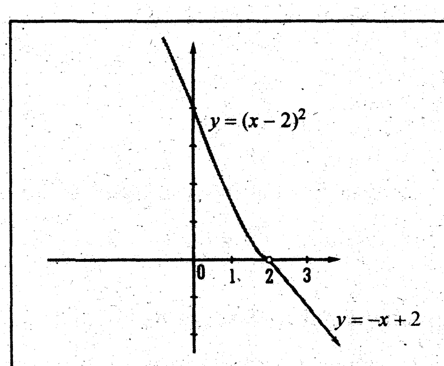
En esta función, nos interesa estudiar en $x=2$.

<u>Veamos</u>:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}}(-x+2)=-2+2=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}}(x-2)^2=(2-2)^2=0$

Como los límites laterales en $x=2$ existen y son iguales, afirmamos que "existe límite de $f(x)$ en $x=2$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$".



2) $g(x)=\begin{cases} x^3-1 \, , x>2 \\ 2 \, , x\leq 2 \end{cases}$

En esta función nos interesa estudiar límites laterales en $x=2$.

Veamos:

a) **Límite por la derecha de $x = 2$:**

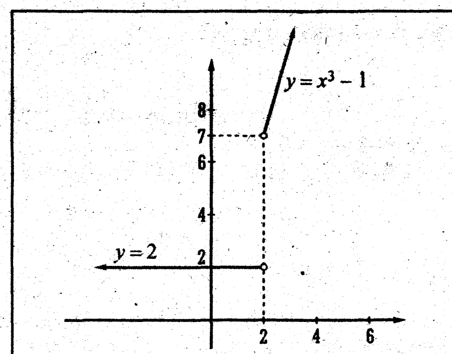
Un número por la derecha de 2 cae en el intervalo $x > 2$, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x^3 - 1) = 2^3 - 1 = 7$$

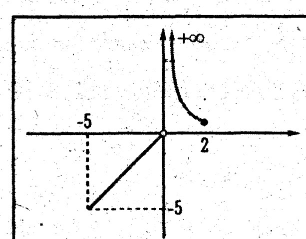
b) **Límite por la izquierda de $x = 2$:**

Un número por la izquierda de 2 cae en el intervalo $x < 2$, por lo tanto:

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (2) = 2$. En este caso afirmamos: los límites laterales existen y son diferentes y por tanto, no existe límite en $x = 2$.



3) $f(x) = \begin{cases} x, -5 \le x < 0 \\ \frac{1}{x}, 0 < x < 2 \end{cases}$



En esta función interesa estudiar límites laterales en $x = 0$, $x = -5$, $x = 2$.

a) **Límite por la derecha de "0":**

Un número por la derecha de "0" cae en el intervalo $0 < x < 2$, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+0} = +\infty$$

En consecuencia no existe límite por la derecha de "0", porque $+\infty$ no es número real.

b) **Límite por la izquierda de "0":**

Un número por la izquierda de "0" cae en el intervalo $-5 < x < 0$, luego:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x) = 0$, este resultado indica que existe límite por la izquierda de "0".

Sin embargo, $f(x)$ no tiene límite en $x = 0$.

c) **Límite por la derecha de "5":**

$\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = \lim\limits_{x>-5} (x) = -5$, este resultado indica que existe límite por la derecha de 5.

d) **Límite por la izquierda de "2":**

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x<2} f = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, este resultado indica que existe límite por la izquierda de 2.

4) $g(x) = \begin{cases} x+5 & , x<2 \\ -\frac{8}{5}x + \frac{22}{5} & , 2 \le x < 4 \\ \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 & , x \ge 4 \end{cases}$

En $g(x)$ estudiaremos límites laterales en $x_0 = 2$ y $x_1 = 4$.

a) **Límites laterales en $x_0 = 2$:**

i) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(-\frac{8}{5}x + \frac{22}{5}\right) = \frac{-16}{5} + \frac{22}{5} = \frac{6}{5}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x+5) = 2 + 5 = 7$

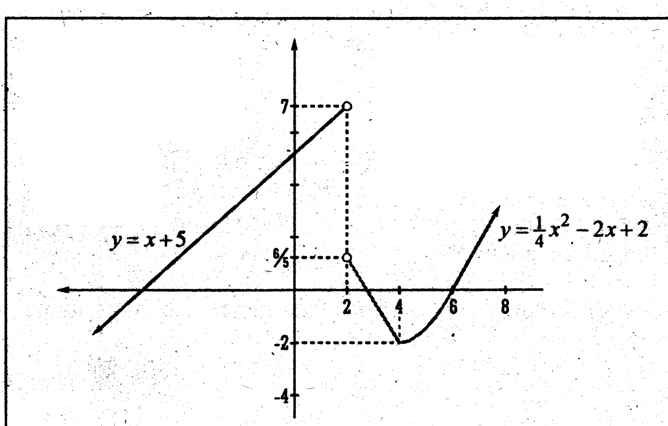
Luego $g(x)$ no tiene límite en $x_0 = 2$; porque los límites laterales en 2 existen pero son diferentes.

b) **Límites laterales en $x_1 = 4$:**

i) $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>2}} \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2\right) = -2$

ii) $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \left(-\frac{8}{5}x+\frac{22}{5}\right) = -2$

En consecuencia existe límite en $x_1 = 4$, porque los límites laterales en 4 existen y son iguales.



4.4.2 LÍMITES LATERALES EN FUNCIONES CON VALOR ABSOLUTO.

5) Sea la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Estudiar los límites laterales en $x = 0$.

Solución:

Voy a resolver este ejercicio de dos maneras.

1er. Método: Definiendo el valor absoluto.

Veamos:

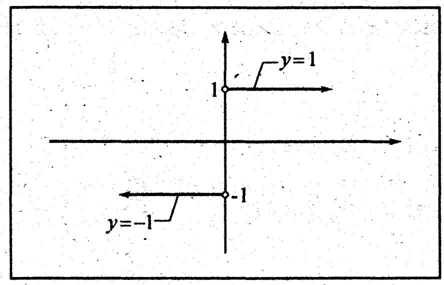
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}\,, & x > 0 \\ \frac{-x}{x}\,, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ -1\,, & x < 0 \end{cases}$$

Ahora, ya podemos calcular límites laterales en $x = 0$.

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1) = 1$ *ii*) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$

Por lo tanto, no existe límite en $x=0$.



SUGERENCIA: El mejor método para estudiar funciones con valor absoluto, es definiendo el valor absoluto.

2do. Método: Sin definir el valor absoluto
Límites laterales en $x=0$

Sabemos que:

Un número a la derecha de "0" es $\boxed{x=0+\varepsilon}$

Un número a la izquierda de "0" es $\boxed{x=0-\varepsilon}$

Donde "ε" (épsilon) es un número real positivo muy pequeño que tiende hacia cero: $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$.

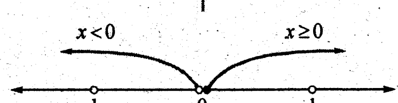
Por lo tanto: *i)* $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|0+\varepsilon|}{0+\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|0-\varepsilon|}{0-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{-\varepsilon}=-1$

6) Sea la función $g(x)=\frac{2}{1-|x|}$ cuyo dominio es:

$x\in D_g \iff x\in I\!R-\{1-|x|=0\}$
$\iff x\in I\!R-\{-1,1\}$

Resolviendo:
$1-|x|=0 \iff |x|=1$
$\Leftarrow x=1 \vee x=-1$



En esta función debemos estudiar límites laterales en $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

Antes de calcular límites laterales, se debe definir el valor absoluto que aparece en la función $g(x)$.

Así:

$$g(x)=\frac{2}{1-|x|}=\begin{cases}\dfrac{2}{1-x}, & \text{si } x\geq 0,\ x\neq 1\\ \dfrac{2}{1+x}, & \text{si } x<0,\ x\neq -1\end{cases} \iff g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-x}, & 0\leq x<1 \vee x>1\\ \dfrac{2}{1+x}, & x<-1 \vee -1<x<0\end{cases}$$

Límites laterales en $x=-1$:

i) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1\\ x+1>0}}\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{2}{+0}=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1\\ x+1<0}}\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{2}{-0}=-\infty$

Límites laterales en $x=1$:

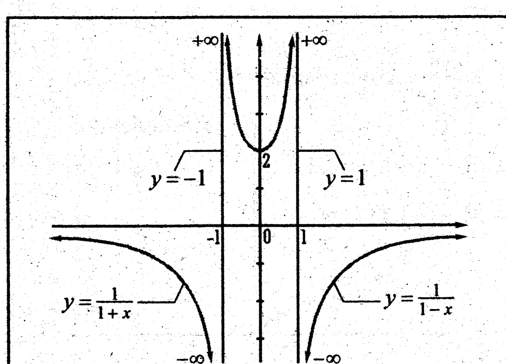
i) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1\\ x-1>0\\ 1-x<0}}\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{2}{-0}=-\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1\\ x-1<0\\ 1-x>0}}\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{2}{+0}=+\infty$

Límites laterales en $x=0$:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x>0}\dfrac{2}{1-x}=2$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x<0}\dfrac{2}{1+x}=2$



7) Dada la función $f(x)=\frac{|x^2-5x+6|}{x-2}$, $x\neq 2$ averiguar en que puntos conviene calcular los límites laterales:

Solución:

Definir el valor absoluto:

$$f(x)=\frac{|x^2-5x+6|}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+5}{x-2}, & \text{si } x^2-5x+6\geq 0\\ \dfrac{-(x^2-5x+6)}{x-2}, & \text{si } x^2-5x+6<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}, & \text{si } (x-2)(x-3)\geq 0\\ \dfrac{-(x-2)(x-3)}{(x-2)}, & \text{si } (x-2)(x-3)<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x-3, & \text{si } x\langle-\infty,2\rangle\cup[3,+\infty\rangle\\ -(x-3), & \text{si } x\in\langle 2,3\rangle\end{cases}$$

Ahora podemos ver claramente los puntos donde debemos calcular límites laterales. Dichos puntos son: $x=2$, $x=3$.

Límites laterales en $x=2$:

i) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}[-(x-3)]=-(2-3)=1$

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-3)=2-3=-1$

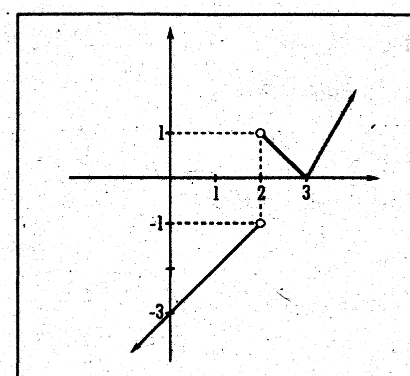
$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f$

Límites laterales en $x=3$:

i) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(x-3)=3-3=0$

ii) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}[-(x-3)]=-(3-3)=0$

Por lo tanto, existe límite en $x=3$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$.



8) Dada la función $f(x)=\dfrac{3x-2}{|3x-2|}$, $x\neq\frac{2}{3}$.

Diga usted si existe o no límite en $x=\frac{2}{3}$. Grafique $f(x)$

9) Dada la función $f(x)=\dfrac{|x^2-2x-15|}{x+3}$, $x\neq -3$.

¿Existe límite en $x=-3$? Grafique $f(x)$.

10) Sea la función $f(x)=\dfrac{|\text{sen}\, x|}{x}$, $x\neq 0$. Hallar los límites laterales en $x=0$.

Solución:

i) Un número a la derecha de "0" es $x=0+\varepsilon$, donde $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$.

Entonces: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\text{sen}\, x|}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\text{sen}(0+\varepsilon)|}{0+\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\text{sen}\,\varepsilon|}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}=1$$

ii) Un número a la izquierda de "0" es $x=0-\varepsilon$, donde $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$

Entonces: $$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\text{sen}\, x|}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\text{sen}(0-\varepsilon)|}{0-\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\text{sen}(-\varepsilon)|}{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|-\text{sen}\,\varepsilon|}{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\text{sen}\,\varepsilon}{-\varepsilon}$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\text{sen}\,\varepsilon}{\varepsilon}=-1$$

Donde $\begin{cases} |-\operatorname{sen}\varepsilon| = \operatorname{sen}\varepsilon \\ \operatorname{sen}(-\varepsilon) = -\operatorname{sen}\varepsilon \end{cases}$

Por lo tanto, no existe límite en $x = 0$.

NOTA:

Hay funciones que parecerían que tiene límite, pero que al estudiarlas cuidadosamente por medio de los límites laterales, sucede que dicho límite no existe.

Veamos el siguiente ejercicio:

11) ¿Existe límite en $x = 0$, en la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen} x}$?

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(0+\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(0+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{\operatorname{sen}\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{\sqrt{1-\cos^2\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{\sqrt{1-\cos\varepsilon}\,\sqrt{1+\cos\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\cos\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(0-\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(0-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(-\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{-\operatorname{sen}\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{-\sqrt{1-\cos\varepsilon}\,\sqrt{1+\cos\varepsilon}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En consecuencia, $f(x)$ no tiene límite en $x = 0$.

12) Sea $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$, $x \neq 0$.

Evaluar $\lim\limits_{x\to 0^+} g$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g$.

13) Dada la función $f(x)=\frac{x-|x|}{x}$, $x\neq 0$.

Evaluar: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Solución:

En primer lugar, debo definir $|x|$:

$$f(x)=\frac{x-|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x-x}{x}, & \text{si } x>0\\ \frac{x-(-x)}{x}, & \text{si } x<0\end{cases} \iff f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x>0\\ 2, & \text{si } x<0\end{cases}$$

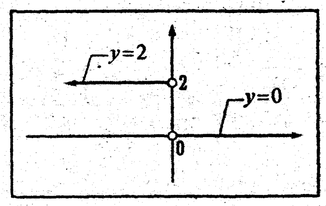
Luego:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(0)=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2)=2$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

El gráfico es:



14) Sí $f(x)=\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$, $x\neq 0$. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} f \ \wedge \ \lim\limits_{x\to 0^-} f$

Solución: 2 y $\frac{1}{6}$.

15) Sea $f(x)=\begin{cases}x-2K, & x\geq 0\\ \frac{\text{sen}\, Ax}{x}, & x<0\end{cases}$

Hallar los valores de K y A, si se sabe que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{2}$

Solución: $K=-2$, $A=\frac{1}{3}$

4.4.3 LÍMITES LATERALES EN LAS FUNCIONES MÁXIMO ENTERO Y SIGNO DE x

Cada vez que se tenga a la vista alguna función con máximo entero o signo de x, lo primero que el lector deberá pensar es: en definir el máximo entero y el signo de x.

Definición 1. La función Máximo entero, está definido por:
$$f(x) = [\![x]\!],\ x \in \mathbb{R}.$$

La notación: $[\![\bullet]\!]$ expresa un número entero k, siempre que $k \le \bullet < k+1$

Esto es: $\boxed{[\![x]\!] = k \iff k \le x < k+1 \quad k \in \mathbb{Z}}$

16) Ejemplos:

1. $[\![1-2x]\!] = k \iff k \le 1-2x < k+1\ ,\quad k \in \mathbb{Z}$
$$\iff -\frac{k}{2} < x \le \frac{1+k}{2}\quad ,\quad k \in \mathbb{Z}$$

2. $\left[\!\!\left[\frac{3-2x}{x}\right]\!\!\right] = k \iff k \le \frac{3-2x}{x} < k+1\ ,\quad k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \ne 0$

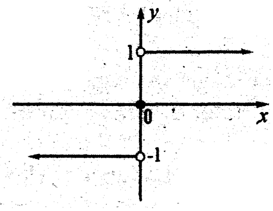
3. $\sqrt{x-[\![x]\!]} = \sqrt{x-k} \iff k \le x < k+1\quad ,\quad x-k \ge 0$

4. $\frac{1}{[\![x-1]\!]} = \frac{1}{k} \iff k \le x-1 < k+1\quad ,\quad k \in \mathbb{Z}\ ,\ k \ne 0$
$$k+1 \le x < k$$

5. $\frac{x}{x-[\![x]\!]} = \frac{x}{x-k} \iff k \le x < k+1\quad ,\quad k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \ne k$

6. $\frac{x}{x-[\![x]\!]} = \frac{2x}{|x|-k}\quad ,\quad k \le x < k+1\ ,\quad k \in \mathbb{Z}\ ,\ |x| \ne k$
$$= \begin{cases} \dfrac{2x}{x-k}\ , & k \le x < k+1\ ,\ x \ge 0\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \ne k \\[2mm] \dfrac{2x}{-x-k}\ , & k \le x < k+1\ ,\ x < 0\ ,\ x \in \mathbb{Z}\ ,\ x \ne -k \end{cases}$$

Definición 2. La función signo de x, está definida por:



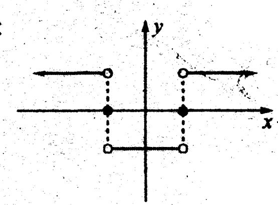
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \\ -1 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

17) Ejemplos:

1. $$\operatorname{sgn}(|x| - 1) = \begin{cases} 1 & , |x| - 1 > 0 \\ 0 & , |x| - 1 = 0 \\ -1 & , |x| - 1 < 0 \end{cases}$$

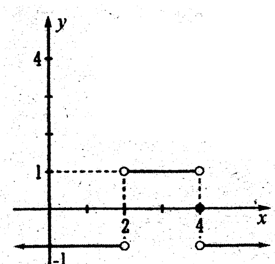
$$= \begin{cases} 1 & , x < -1 \vee x > 1 \\ 0 & , x = -1 \vee x = 1 \\ -1 & , 1 < x < -1 \end{cases}$$

Su gráfico es:



2. $$\operatorname{sgn}\left(\frac{4-x}{x-2}\right) = \begin{cases} 1 & , \frac{4-x}{x-2} > 0 \\ 0 & , \frac{4-x}{x-2} = 0 \\ -1 & , \frac{4-x}{x-2} < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & , 2 < x < 4 \\ 0 & , x = 4 \\ -1 & , x < 2 \vee x > 4 \end{cases}$$



PROBLEMAS

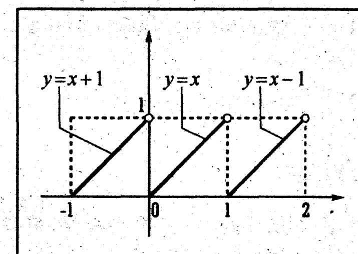
18) Sí $f(x) = x - [\![x]\!]$ hallar $\lim\limits_{x\to K^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to K^-} f(x)$, donde $K \in \mathbb{Z}$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to K^+} (x - [\![x]\!]) = \lim\limits_{\substack{x\to K \\ x>K}} (x-K) = K-K=0$

b) $\lim\limits_{x\to K^-} (x - [\![x]\!]) = \lim\limits_{\substack{x\to K \\ x<K}} (x-(K-1)) = K-(K-1) = K-K+1=1$

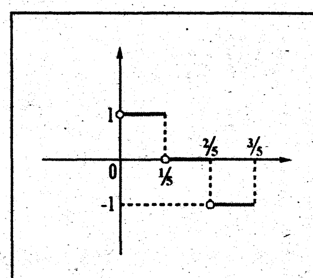
$$f(x) = x - [\![x]\!] = \begin{cases} \vdots \\ x-1 \ , \text{ si } 1 \le x < 2 \\ x-0 \ , \text{ si } 0 \le x < 1 \\ x+1 \ , \text{ si } -1 \le x < 0 \\ \vdots \end{cases}$$



19) Estudiar los límites laterales en la función $g(x) = [\![2-5x]\!]$

Solución:

En primer lugar, definamos la función $g(x)$ para cada número entero *K*.



Veamos:

$$g(x) = [\![2-5x]\!] = K \iff k \le 2-5x < K+1$$
$$\iff K-2 \le -5x < K+1-2$$
$$\iff K-2 \le -5x < K-1$$
$$\iff \frac{-K+2}{5} \ge x > \frac{-K+1}{5}$$

$$g(x) = [\![2-5x]\!] = \begin{cases} \vdots \\ -1 \ , \ \frac{2}{5} < x \le \frac{3}{5} \\ 0 \ , \ \frac{1}{5} < x \le \frac{2}{5} \\ 1 \ , \ 0 < x \le \frac{1}{5} \\ \vdots \end{cases}$$

Como vemos la función $g(x)=[\![2-5x]\!]$ no tiene límites en todos los puntos de la forma: $\frac{-K+1}{5}$, donde $K\in\mathbb{Z}$.

Pues $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-K+1}{5}\right)^+}[\![2-5x]\!]=K$ $\qquad \lim\limits_{x\to\left(\frac{-K+1}{5}\right)^-}[\![2-5x]\!]=K+1$

20) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=[\![2-3x]\!]-2x$.

21) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=[\![1-2x]\!]+\sqrt{x}$.

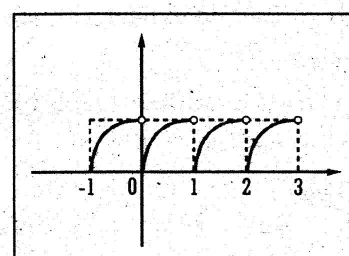
22) ¿Para qué valores reales en la función $f(x)=\sqrt{x-[\![x]\!]}$, no existe límite?

Solución:

En primer lugar, debo definir la función $[\![x]\!]$ que aparece dentro de la raíz cuadrada para cada entero K.

Veamos:

$$f(x)=\sqrt{x-[\![x]\!]}=\begin{cases}\sqrt{x-2}\ , & \text{si } 2\le x<3\\ \sqrt{x-1}\ , & \text{si } 1\le x<2\\ \sqrt{x-0}\ , & \text{si } 0\le x<1\\ \sqrt{x-(-1)}\ , & \text{si } -1\le x<0\\ \vdots & \end{cases}$$



Los límites laterales para cada, $K\in\mathbb{Z}$, son:

a) $\lim\limits_{x\to K^+}\sqrt{x-[\![x]\!]}=\lim\limits_{\substack{x\to K\\ x>K\\ K<x}}\sqrt{x-K}=\lim\limits_{x\to K}\sqrt{x-K}=\sqrt{K-K}=0$

b) $\lim\limits_{x\to K^-}\sqrt{x-[\![x]\!]}=\lim\limits_{\substack{x\to K\\ x<K\\ K-1\le x<K}}\sqrt{x-(K-1)}=\lim\limits_{x\to K}\sqrt{x-(K-1)}$

$=\sqrt{K-(K-1)}=\sqrt{1}=1$

Como vemos, los límites laterales para cada $K \in \mathbb{Z}$ son diferentes. En consecuencia no existe límite para todo $K \in \mathbb{Z}$.

23) Estudiar los límites laterales en la función $f(x) = \frac{1}{[\![x]\!]}$

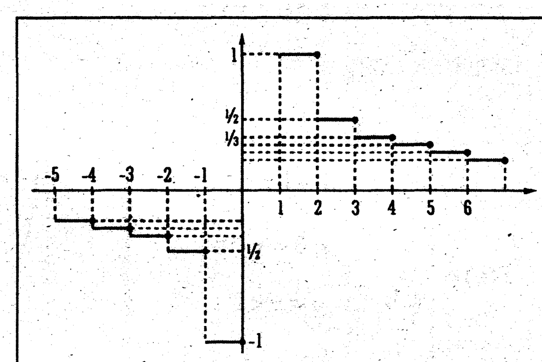
Veamos:

1° El dominio de $f(x) = \frac{1}{[\![x]\!]}$ es $I\!R - \{[\![x]\!] = 0\}$, donde: $[\![x]\!] = 0 \iff 0 \le x < 1$

$I\!R - [0,1\rangle$.

Donde:

$$f(x) = \frac{1}{[\![x]\!]} = \begin{cases} \vdots \\ -\frac{1}{2}\ , \text{ si } -2 \le x < -1 \\ -1\ , \text{ si } -1 \le x < 0 \\ 1\ , \text{ si } 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}\ , \text{ si } 2 \le x < 3 \\ \frac{1}{3}\ , \text{ si } 3 \le x < 4 \end{cases}$$



2° Los límites laterales son:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to K^+ \\ x > K \\ K < x < K+1}} \frac{1}{[\![x]\!]} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{K} = \frac{1}{K}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to K^- \\ x < K \\ K-1 \le x < K}} \frac{1}{[\![x]\!]} = \lim\limits_{x \to K} \frac{1}{K-1} = \frac{1}{K-1}$

Donde: $K \in \mathbb{Z}$, con $K \neq 0$ y $K \neq 1$.

24) Estudiar los límites laterales en la función $f(x) = \frac{1}{x - [\![x]\!]}$

Veamos:

1° **Dominio de $f(x)$:** $x \in \text{Dom}(f) \iff x \in I\!R - \{x - [\![x]\!] = 0\}$

$\iff x \in (R - \mathbb{Z})$

Resolviendo la ecuación: $x - [\![x]\!] = 0$

$x = [\![x]\!]$

$\downarrow$

Donde: $x = K \iff k \le x < K+1,\ K \in Z$

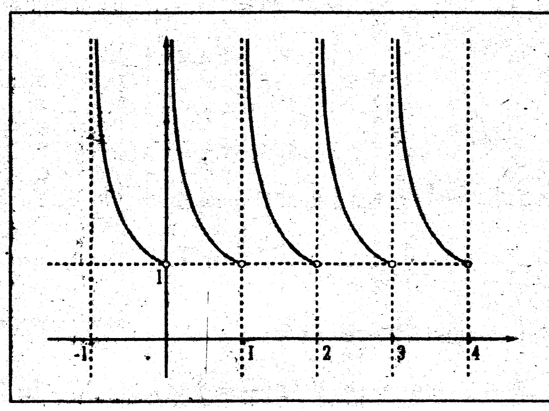
2° **Los límites laterales son:**

a) $\lim\limits_{\substack{x\to K^+\\ x>K\\ K<x<K+1}} \frac{1}{x-[\![x]\!]} = \lim\limits_{\substack{x\to K\\ x>K\\ x-K>0}} \frac{1}{x-K} = \frac{1}{+0} = +\infty$ Si $x>K$, entonces $[\![x]\!]=K$ porque $K\le x<K+1 \Rightarrow [\![x]\!]=K$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to K^-\\ x<K\\ K-1\le x<K}} \frac{1}{x-[\![x]\!]} = \lim\limits_{\substack{x\to K^-\\ x<K\\ x-K<0}} \frac{1}{x-(K-1)} = \frac{1}{K-(K-1)} = \frac{1}{1} = 1$. Si $x<K$, entonces $[\![x]\!]=K-1$ porque $K-1\le x<K \Rightarrow [\![x]\!]=K-1$

3° **La gráfica será:**

$$f(x)=\begin{cases} \vdots \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } -1<x,0 \\ \frac{1}{x}, & \text{si } 0<x<1 \\ \frac{1}{x-1}, & 1<x<2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{si } 2<x<3 \\ \vdots \end{cases}$$



25) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$

26) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=[\![x]\!]+[\![-x]\!]$

27) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=\sqrt{x+[\![x]\!]}$

28) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=[\![x-2]\!]-x$

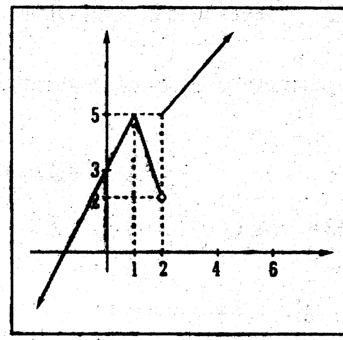
29) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=x^2-[\![x]\!]$

30) Estudiar los límites laterales en la función $f(x)=|x|-[\![x]\!]$

4.5 PROBLEMAS SOBRE CONTINUIDAD DE FUNCIONES

31) Determinar en qué puntos la función $f(x)$ es continúa o discontinua, si se sabe que:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 \text{ , si } x\leq 1 \\ 8-3x \text{ , si } 1<x<2 \\ x+3 \text{ , si } x\geq 2 \end{cases}$$



Solución:

Estudiemos en $x=1$:

i) $f(1)=2(1)+3=5\in \mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(8-3x)=8-3(1)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x+3)=2(1)+3=5$

Entonces existe límite en $x=1$.

iii) $\underbrace{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}_{5}=\underbrace{f(1)}_{5}$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en: $x=1$

Estudiemos en $x=2$:

i) $f(2)=2+3=5\in \mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x+3)=2+3=5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(8-3x)=8-3(2)=2$

En consecuencia, no existe límite en $x=2$, por lo tanto no hay continuidad en dicho punto. Además, f es continua en $\langle -\infty,2\rangle\cup\langle 2,+\infty\rangle$.

De manera similar, resolver los siguientes problemas:

32) Investigar la continuidad en la función: $g(x)=\begin{cases} 2x^2-\frac{1}{2} \ , & 0<x<\frac{1}{2} \\ 0 \ , & x=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8x^2} \ , & x>\frac{1}{2} \end{cases}$

Solución: $g(x)$ es continua en $x=\frac{1}{2}$ y todo $\mathbb{R}$.

33) $h(x)=\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} \ , & x\neq 2, x\neq -2, x\neq -2 \\ 3 \ , & x=2 \\ 5 \ , & x=-2 \end{cases}$

R. h es continua en $x=2$,
$\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)=-\infty$

34) $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \ , & x\neq 0 \\ 0 \ , & x=0 \end{cases}$

R. f es continua en $x=0$.

35) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} \ , & x<1 \\ \frac{5}{2}x-\sqrt{5-[\![x]\!]} \ , & 1\leq x<2 \\ 3 \ , & x=2 \\ 2x-\text{sgn}\left(\frac{|x|-2}{2x-1}\right) \ , & x>2 \end{cases}$

Graficar f.
R. f no es continua en $x=1$, es continua en $x=2$.

36) $f(x)=\begin{cases} 2-\frac{|x|}{x} \ , & x<0 \\ 2 \ , & x=0 \\ 5-\frac{2}{|x|} \ , & 0<x\leq 2 \\ \frac{3x^2-8x+4}{x-2} \ , & x>2 \end{cases}$

R. f es continua en $x=2$,
no es continua en $x=0$.

37) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}+3\sqrt{x-\text{sgn}(x-1)} & ,x>1 \\ 1 & ,x=1 \\ \frac{2(x^2-1)}{x-1}-3 & ,-2<x<1 \\ -5 & ,x=-2 \\ -2\sqrt{-x-1}-3 & ,x<-2 \end{cases}$

R. es continua en $x=1$, $x=-2$.
Graficar $f(x)$.

38) $f(x)=\begin{cases} |x| \ , & \text{si } |x|\geq 1 \\ x^2-1 \ , & \text{si } |x|<1 \end{cases}$

R. No es continua en -1, no es continua en $x=1$.

39) $f(x)=\begin{cases} |x-1| \ , & |x-1|\leq 2 \\ 3-\frac{1}{4}(x-1)^2 \ , & |x-1|>2 \end{cases}$

¿Es f continua en: $x=-1,1,3$. Graficar $f(x)$?

40) $f(x)=\begin{cases} -\frac{|x-2|^2}{4}+1 \ , & |x-2|\leq 2 \\ (x-2)^2-4 \ , & |x-2|>2 \end{cases}$

¿Es f continua en $x=0$? ¿en $x=4$?

41) Hallar el valor de K que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} 3x+4 \ , \ x\leq 4 \\ Kx-1 \ , \ x>4 \end{cases}$

sea continua en todo $x\in I\!R$.

i) $f(4)=3(4)+7=19$

ii) Para que $f(x)$ sea continua en $x=4$, debe cumplirse que los límites laterales en $x=4$ sean iguales.

$$\underbrace{\lim_{x\to 4^+} f(x)}=\underbrace{\lim_{x\to 4^-} f(x)}$$

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}(Kx-1)=\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(3x+7)$$

$$K(4)-1=3(4)+7$$

$$4K-1=12+7 \iff 4K=20 \iff K=5$$

42) Hallar el valor de la constante K que hacen que la función:

$$f(x)=\begin{cases} Kx-1 \ , \ x<2 \\ Kx^2 \ , \ x\geq 2 \end{cases}$$ sea continua en todo $x\in I\!R$.

Solución: $K=-\frac{1}{2}$

43) Hallar los valores de las constantes c y k que hacen que la función

$$f(x)=\begin{cases} x \ , \ x\leq 1 \\ cx+k \ , \ 1<x<4 \\ -2x \ , \ x\geq 4 \end{cases}$$ sea continua en todo $x\in I\!R$.

Solución:

Como la función $f(x)$ está definida en $x=1$ y en $x=4$, entonces los límites en $x=1$ y en $x=4$ deberán ser iguales.

En $x=1$ deberá cumplirse que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

(1)...... $c(1)+k=1$

En $x=5$ deberá cumplirse que:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-} f(x)$$

(2)............$-2(4)=c(4)+k$

Ahora resolvamos el sistema de ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}C(1)+K=1\\ -2(4)=C(4)+K\end{cases} \quad \text{por } -1 \rightarrow \begin{cases}C+K=1\\4C+K=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-C-K=-1\\4C+K=-8\end{cases}$$

$$3C = -9$$

$$\boxed{C=-3}$$

Reemplazando (3) en (1): $-3+K=1 \iff \boxed{K=4}$

44) Hallar los valores de las constantes C y K que hacen que la función:

$$f(x)=\begin{cases}x+2C & , \ x<-2\\ 3Cx+K & , \ -2\le x\le 1\\ 3x-2K & , \ x>1\end{cases} \text{ sea continua en todo } x\in I\!R.$$

Solución:
Como $f(x)$ está definida en $x=2$ y en $x = 1$, entonces los límites laterales, tanto en -2 como en 1 deberán ser iguales.

En $x=-2$ deberá cumplirse que:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)$$

$$3C(-2)+K=-2+2C \ \ ...... (1)$$

En $x=1$ deberá cumplirse que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$3(1)-2K=3C(1)+K \ \ ...... (2)$$

Ahora, resolvamos el sistema de ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}3C(-2)+K=-2+2C\\ 3(1)-2K=3C(1)+K\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6C+K=-2+2C\\ 3-2K=3C+K\end{cases}$$

$$\begin{cases}-8C+K=-2\\ -3C-3k=-3 \longrightarrow \text{Dividir por 3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-8C+K=-2\\ -C-K=-1 \ \ ...... (3)\end{cases}$$

$$-9C=-3$$

$$C=\tfrac{1}{3} \ \ ...... (4)$$

(4) en (3): $-\frac{1}{3}-K=-1$

$$-K=-1+\tfrac{1}{3}$$

$$-K=-\tfrac{2}{3} \iff K=\tfrac{2}{3}$$

45) Determinar los valores de A y B para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} -2\operatorname{sen}x & , \ x\leq -\frac{\pi}{2} \\ A\operatorname{sen}x+B & , \ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & , \ x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ sea continua en todo $x\in I\!R$.

Solución:

La función $f(x)$ está definida en $x=-\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{\pi}{2}$, lo que falta es que los límites laterales sean iguales:

En: $x=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x)$$

$$A\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+B=-2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A\left[-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right]+B=-2\left[-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$-A+B=2\ldots\ldots(1)$$

En: $x=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=A\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+B$$

$$0=A+B\ \ldots\ldots(2)$$

Ahora, resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=0 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ -A+B=2 \ \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

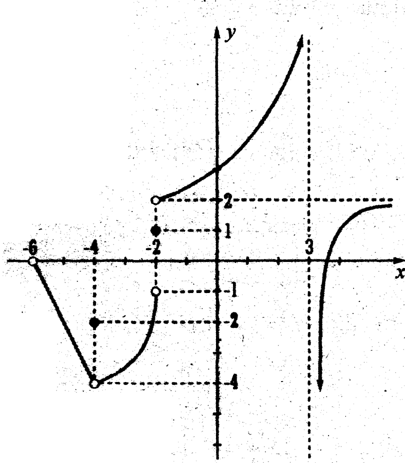
$$2B=2$$

$$B=1\ \ldots\ldots\ldots (3)$$

(3) en (1): $-A+1=2 \ \Rightarrow\ A=-1$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Supongamos que la gráfica de una función $f(x)$ sea la siguiente.



Sólo mirando la gráfica de la función $f(x)$, hallar:

a) $\lim_{x\to -4^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -4^+} f(x)$

c) ¿Existe límite de $f(x)$ en $x=-4$.

d) ¿ $f(x)$ está definida en $x=-4$?

e) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ f) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

g) ¿existe $\lim_{x\to -2} f(x)$?

h) ¿ $f(x)$ está definida en $x=-2$?

i) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ j) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

k) ¿ $f(x)$ está definido en $x=3$?

l) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

R.: a) -4 ; b) -4 ; c) Si, porque los límites laterales existen y son iguales, se escribe $\lim_{x\to -4} f(x)=4$; d) Si, porque $f(-4)=-2$; e) -1; f) 2 ; g) No, porque los límites laterales existen, pero son diferentes; h) Si, porque $f(-2)=1$; i) $+\infty$; j) $-\infty$; k) No, porque $x=3$ no tiene su pareja (imagen); l) 2.

02 Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-12 & , -6<x<-4 \\ -2 & , x=-4 \\ \frac{3}{4}(x+4)^2-4 & , -4<x<-2 \\ 1 & , x=-2 \\ \frac{10}{3-x} & , -2<x<3 \\ \frac{-2}{x-3}+2 & , x>3 \end{cases}$$

haga todos los cálculos y responda todas las preguntas que se plantean en el problema 1).

Las respuestas son las mismas.

03 Calcular $\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}\right]$

R.: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

04 Calcular $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-x)$

R.: $\frac{3}{2}$

05 Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+2x})$

R.: -1

06 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{3x^2+8x+6}-\sqrt{3x^2+3x+1}]$

R.: $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

07 Determinar las asíntotas horizontales y verticales de cada curva.

a) $y=\frac{x}{x+4}$

b) $y=\frac{x^3}{x^2+3x-10}$

c) $y=\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

R.: a) $y=1$, $x=-4$
b) $x=2$; $x=-5$
c) $y=\pm 1$

08 Halle una fórmula para una función f que satisfaga:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$,

$f(2)=0$, $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\infty$

R.: $\frac{(2-x)}{x^2(x-3)}$

09 Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ si $\frac{4x-1}{x}<f(x)<\frac{4x^2+3x}{x^2}$ para todo $x>5$.

R.: 4

10 Explique por qué la función es discontinua en el punto dado. Bosqueje la gráfica.

a) $f(x)=\text{Ln}|x-2|$, $x=2$

b) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$, $x=-1$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x-8}{x-4} & , \text{ si } x\neq 4\\ 3 & , \text{ si } x=4\end{cases}$

$x=4$

R.: a) $f(2)$ no está definido.
b) $f(-1)$ no está definido.
c) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)\neq f(4)$

11 La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es:

$$F(r)=\begin{cases}\frac{GMr}{R^3} & , \text{ si } r<R\\ \frac{GM}{r^3} & , \text{ si } r\geq R\end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?

R.: Si porque $\lim\limits_{r\to R}F(r)=\frac{GM}{r^2}$

12 ¿Para qué valores de x es continua f?

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ , \ \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 \ , \ \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

R.: Ninguna.

13 ***Definición.-*** La pendiente de una recta que es tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ es el límite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Hallar la pendiente de la recta tangente en el punto que se indica, además, hallar la ecuación de la recta.

a) $f(x)=1-2x-3x^2$, $(-2,-7)$

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $(1,1)$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$

d) $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $x=0$

e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-2x}}$, $x=2$

f) $f(x)=1+x+x^2$, $x=a$

14 **VELOCIDAD**

Supongamos que la función $S=f(t)$ es el desplazamiento (distancia dirigible) de un objeto respecto al origen, en el instante "t". La velocidad (o velocidad instantánea) $v(a)$ en el instante $t=a$, es el siguiente límite:

$$v(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Problemas:

a) Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos se expresa con:

$$f(t)=40t-16t^2$$

Encuentre la velocidad cuando $t=2$.

R.: -24 pies/seg.

b) La ecuación del movimiento:

$$S=4t^3+6t+2$$

denota el desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta.

En dicha expresión, t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes.

$$t=a \ , \ t=1 \ , \ t=2 \ \text{ y } \ t=3$$

R.: $12a^2+6$, 18 m/s
54 m/s , 114 m/s

4.6 DISCONTINUIDADES

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A =$ dominio de f.

Definición: Si x_0 es un punto que pertenece al dominio de f en el cual f no es continua, entonces decimos que f es discontinua en x_0 o que f tiene una discontinuidad en x_0.

Clases de discontinuidad:

Hay dos clases de discontinuidad:

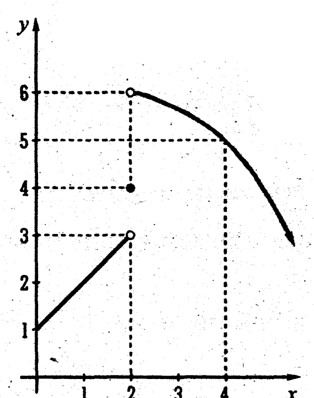
I) Diremos que la función f tiene una discontinuidad de **PRIMERA CLASE** en $x_0 \in D_f$ si ocurre cualquiera de los dos casos:

$$\text{Caso A} \begin{cases} 1° \quad f(x_0) \in \mathbb{R} \\ 2° \quad \text{Existen los límites en } x_0 \text{ y son diferentes, esto es:} \\ \qquad \lim_{x \to x_0^+} f \neq \lim_{x \to x_0^-} \end{cases}$$

Cuando ocurre éste caso, se dice que la función $f(x)$ tiene una **DISCONTINUIDAD FINITA** en $x = x_0$.

En la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad 0 \leq x < 2 \\ 4 & , \quad x = 2 \\ -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 6 & , \quad x > 2 \end{cases}$$



Se tiene:

1° $f(2) = 4$

2° $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 6$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

No existe límite en $x = 2$. Por eso $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

NOTA:

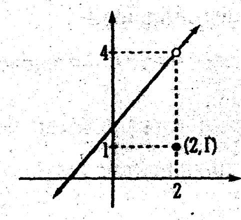
Decir que existen límites laterales, significa que los límites sean números reales.

Caso B $\begin{cases} 1° \ f(x_0) \in I\!R \\ 2° \ \lim\limits_{x \to x_0^+} f = \lim\limits_{x \to x_0^-} f \ \wedge \ \lim\limits_{x \to x_0} f \neq f(x_0) \end{cases}$

En este caso la discontinuidad es **EVITABLE** (removible o salvable) y se consigue la **CONTINUIDAD** haciendo: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Cuando ocurre este tipo de discontinuidad, se dice, que la función $f(x)$ tiene una **DISCONTINUIDAD DE PUNTO FALTANTE.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} \ , \ x \neq 2 \\ 1 \ , \ x = 2 \end{cases}$$



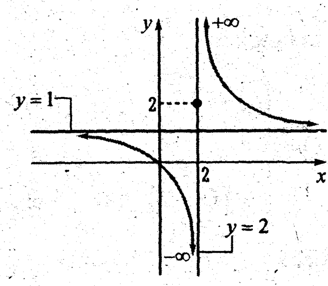
$$\underbrace{\lim_{x \to 2} f}_{4} \neq \underbrace{f(2)}_{1}$$

Para que $f(x)$ sea continua se hace: $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f = 4$

II) Decimos que la función f tiene una discontinuidad de **SEGUNDA CLASE** en $x_0 \in D_f$, si no existen límites laterales en x_0.

Es decir: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f = \pm\infty \ \vee \ \lim\limits_{x \to x_0^-} = \pm\infty$

Cuando ocurre éste caso, se dice también, que $f(x)$ tiene **DISCONTINUIDAD INFINITA** en $x = x_0$.



$$f(x) = \begin{cases} 2 \ , \ x = 2 \\ \dfrac{x}{x-2} \ , \ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

EJEMPLOS

① La función $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 1 \\ 0 & , x=1 \end{cases}$ tiene discontinuidad finita en $x=1$. Pruébelo.

② La función $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ -3 & , x=2 \end{cases}$ tiene discontinuidad evitable en $x=2$. Pruébelo.

③ La función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \neq 2 \\ 5 & , x=2 \end{cases}$ tiene discontinuidad infinita en $x=2$. Pruébelo.

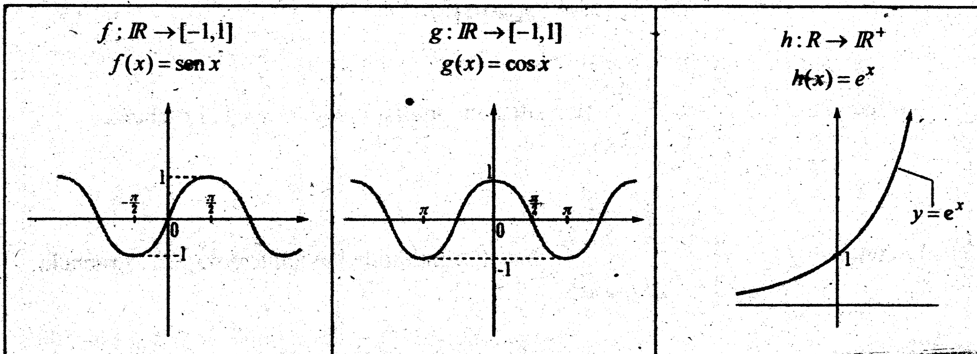
④ La función $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x^2-4} & , x \neq \pm 2 \\ 0 & , x=2 \\ 3 & , x=-2 \end{cases}$ tiene discontinuidad infinita en 2 y −2. Pruébelo.

⑤ La función $f(x)=[\![x]\!]$ tiene discontinuidad finita en cada número entero. Pruébelo y grafique.

⑥ Dadas las funciones $f(x)=x-[\![x]\!]$ y $g(x)=\sqrt{x-[\![x]\!]}$. Se tiene que ambos $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas en cada número entero. Son de discontinuidad finita. Los límites laterales en cada número entero es 0 y 1 respectivamente. Graficarlos.

⑦ Dada la función $f(x)=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$. Se tiene que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Graficar f.

⑧ Las funciones seno, coseno y la exponencial simple son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.



Porque las funciones seno y coseno son continuas en todo $I\!R$ y son periódicas de periodo 2π, se aplica en SERIES DE FOURIER, tema de gran importancia en matemáticas.

La función exponencial simple es continua en todo $I\!R$, es creciente en todo $I\!R$, es positiva para todo $x \in I\!R$, es de clase C^{∞} (todas sus derivadas son continuas).

PROBLEMAS PROPUESTOS

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2 \ , & \text{si } x \le 2 \\ x-1 \ , & \text{si } 2 < x < 3 \\ 3 \ , & \text{si } x = 3 \\ 5-x \ , & 3 < x \le 4 \\ \frac{1}{x-4} \ , & x > 4 \end{cases}$

a) Representar gráficamente.

b) Estudiar, la existencia de los límites: $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 4} f(x)$.

c) Estudiar los puntos de discontinuidad y graficarlos.

2) Dada $f(x) = \frac{x}{1+Lnx}$, hallar su dominio y los puntos de discontinuidad, Graficar.

3) Dada la función $f(x) = 0.08([\![x]\!]+1)$, estudiar su discontinuidad y graficar.

4) Dada la función $f(x) = [\![\frac{x}{12}]\!] + 0.01\left(x - 12[\![\frac{x}{12}]\!]\right)$, estudiar su discontinuidad y graficar.

Determinar los valores de "x" para los cuales las siguientes funciones son discontinuas.

5) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2+4x+4}$ **Rpta.:** $x=-2$

6) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2-4x+5)}$ **Rpta.:** $x=1$

7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **Rpta.:** $Dom(f)=x\in\langle-\infty,-1]\cup\langle1,+\infty\rangle$
En $x=1$ es discontinua.

8) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^3-x^2+x}$ **Rpta.:** $x=0$

9) $f(x)=\log\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ **Rpta.:** $x=0$; $x=2$
$Dom(f)=\langle-\infty,0\rangle\cup\langle2,+\infty\rangle$

10) $f(x)=\log(2x-5)$ **Rpta.:** $Dom(f)=x\in\langle5/2,+\infty\rangle$
Es discontinua en $5/2$.

11) $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}$ **Rpta.:** $x=0$

12) $f(x)=\dfrac{e^x+2x^2}{2e^{3x}-2}$ **Rpta.:** $x=0$

13) $f(x)=\dfrac{1}{3e^{3x}-3}$ **Rpta.:** $x=0$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ **Rpta.:** $x=0$

15) Sí $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$, $x\neq2$
¿Qué valor deberá asignarse a $f(x)$ para que $f(x)$ sea continua en $x=2$?

En los siguientes ejercicios estudie la continuidad de cada una de las funciones y diga a qué clase de discontinuidad pertenece hallando previamente los puntos de discontinuidad. Si la discontinuidad es removible, dar la definición apropiada para ser continua. Graficar.

16) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-3}, & x\neq 3 \\ 1, & x=3 \end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ -2, & x=-1 \end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases} x+2, & -3<x\leq -2 \\ -x-2, & -2<x<0 \\ x^2-2, & 0\leq x<4 \end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x+3}, & x\neq -3 \\ 1, & x=-3 \end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, & x\neq 3 \\ 5, & x=3 \end{cases}$

TEOREMAS SOBRE CONTINUIDAD EN UN PUNTO

TEOREMA 3 Sean las funciones $f,g: A\to I\!R$

Sí las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x_0\in A$, entonces:

I) $(f+g)$ es continua en x_0.

II) $(f-g)$ es continua en x_0.

III) fg es continua en x_0.

IV) Sí $g(x_0)\neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0.

Demostración:

De I 1) Por hipótesis se tiene que $f(x)$ es continua en x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2) $g(x)$ es continua en x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

3) Sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4) Reemplazando (1) y (2) en (3) tenemos:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=f(x_0)+g(x_0)$$

$$=(f+g)(x_0),\ x_0\in D_{f+g}$$

Esto demuestra que $f+g$ es continua en x_0.

De II *Queda como ejercicio...*

De III 5) Sabemos que: $\lim\limits_{x\to x_0}(f\,g)(x)=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right]$

6) Reemplazando (1) y (2) en (5): $\lim\limits_{x\to x_0}(f\,g)(x)=[f(x_0)][g(x_0)]$

$$=(fg)(x_0)\,,\ x_0\in D_{fg}$$

Esto demuestra que $f\,g$ es continua en x_0.

De IV 7) Sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ por teorema del límite de un cociene.

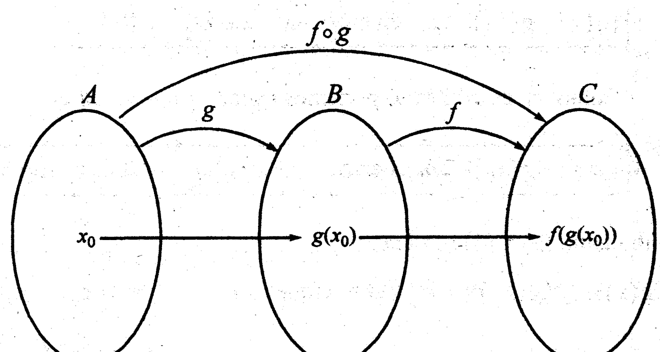
8) Por (1) y (2): $=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\,,\ g(x_0)\neq 0$

$$=\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)\,,\ x_0\in D_{\frac{f}{g}}$$

CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE DOS FUNCIONES

TEOREMA 4 Sean las funciones $g:A\to I\!R$ y $f:B\to I\!R$ donde $g(A)\subset B$.

Si g es continua en $x_0\in A$ y f es continua en $g(x_0)\in B$, entonces $f\circ g$ es continua en x_0.



Demostración:

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, debo probar que existe $\delta > 0$ tal que:

$x \in D_{f \circ g} \wedge |x - x_0| < \delta$ implica, $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)| < \varepsilon$.

Veamos:

1) Pero $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))|$, pues $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

2) Por hipótesis, se tiene que:

a) f es continua en $g(x_0)$, entonces $\exists$ un $\delta_1 > 0$; tal que:

(*) $|f(x) - f(g(x_0))| < \varepsilon$ siempre que $y \in D_f \wedge 0 < |y - g(x_0)| < \delta_1$

Como $y \in D_f \Rightarrow \exists\, x \in D_g$, tal que: $y = g(x)$

Sustituyendo en (*) para $y = g(x)$ resulta:

3) $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$ siempre que $g(x) \in D_f \wedge 0 < |g(x) - g(x_0)| < \delta_1$

Ahora, el problema consiste en "garantizar" si la desigualdad $|g(x) - g(x_0)| < \delta_1$ es verdadero $\forall\, x \in D_g$.

Veamos:

b) Por hipótesis tenemos que:

g es continua en x_0, entonces dado un $\varepsilon_1 > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_1$ siempre que $x \in D_g \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

Como ε_1 es arbitrario podemos hacer $\varepsilon_1 = \delta_1$ y así obtenemos que:

4) $|g(x) - g(x_0)| < \delta_1$ siempre que $x \in D_g \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

5) Combinando (3) y (4) se tiene que:

$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_{f \circ g} \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

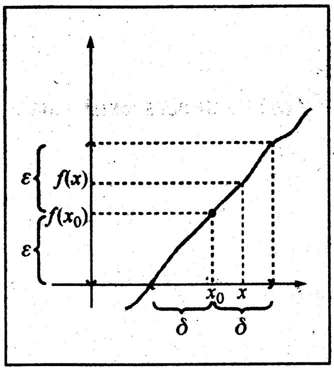
$$D_{f \circ g} = \{ x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \}$$

TEOREMA 5 Sea la función $f: A \to \mathbb{R}$

Supongamos que f es continua en $x_0 \in A$ y $f(x_0) > 0$.

Entonces existe un número $\delta > 0$, tal que, $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - x_0| < \delta$.

<u>Demostración:</u>



1) Como f es continua en x_0, entonces dado un $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall\, x$ que satisface:

$$\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in \langle x_0 - \delta,\, x_0 + \delta \rangle}$$

2) Como $f(x_0) > 0$ (según hipótesis) y ε es arbitrario y positivo, entonces podemos escoger.

$$\boxed{\varepsilon = f(x_0)} \quad (*)$$

3) Reemplacemos (*) en (1):

$$|f(x) - f(x_0)| < f(x_0) \iff -f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0)$$
$$\iff 0 < f(x) < 2f(x_0)$$
$$\Rightarrow 0 < f(x) \quad \leftarrow \text{Esto se cumple}$$

Para todo x que satisface $|x - x_0| < \delta$.

Corolario Sí $f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$, tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - x_0| < \delta$.

Sugerencia:

Haga $f(x_0) < 0 \iff -f(x_0) > 0$ y aplicar el teorema 5.

❐ 4.7 TEOREMAS FUERTES SOBRE CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO $[a,b]$

Introducción: Hasta el momento, hemos estudiado la continuidad de una función en un punto. En los teoremas que estudiaremos a continuación, se exige para su validez, que las funciones sean continuas en todo un intervalo cerrado $[a,b]$. Si la continuidad deja de cumplirse en un sólo punto, las conclusiones pueden no ser ciertas.

TEOREMA 6 **(Teorema del valor medio)**

Sea $f:[a,b]\rightarrow I\!R$. Sí f es continua en $[a,b]$ y $f(a)<0<f(b)$, entonces existe algún $x\in\langle a,b\rangle$, tal que $f(x)=0$.

<u>Demostración:</u>

1) Definamos el conjunto A del siguiente modo:

   $A=\{x/x\in[a,b] \wedge f(x)<0$ para $x\in[a,x]\}$, x varía, $x<b$.

   Evidentemente $A\neq\phi$, puesto que por lo menos $a\in A$.

   Por demostrarse que: Si $\alpha=\sup A$, entonces debe cumplirse $f(\alpha)=0$.

<u>Veamos</u>:

2) Sabemos por hipótesis que f es continua en todo $x\in[a,b]$.

3) Por hipótesis se tiene que: $f(a)<0 \wedge f$ es continua en "a" $\Rightarrow$ existe un $\delta>0$, tal que, $f(x)<0$ para todo x que satisface: $a\leq x<a+\delta$

4) Por hipótesis tenemos: $f(b)>0 \wedge f$ es continua en b, entonces por el teorema 5 existe un $\delta>0$, tal que, $f(x)>0$ para todo x que satisface:

$$\boxed{b-\delta<x\leq b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$-\delta<x-b\leq 0$$

$$0\leq b-x<\delta$$

   Donde "b" es una cota superior del conjunto A, pues: $[a,b]=[a,x]\cup[x,b]$

5) Pero todos los puntos "x" que satisfacen la desigualdad (i) son **COTAS SUPERIORES DE** A, por lo tanto, por el **AXIOMA DEL SUPREMO**, A **TIENE SUPREMO**, ya que está acotado superiormente.

6) Por los pasos (1),(3) y (4) llamemos $\alpha = \sup A$ donde $a < \alpha < b$

Si $\alpha = \sup A \Rightarrow \begin{cases} x \le \alpha \, , \forall \, x \in A \\ \alpha - \delta < x < \alpha < b \text{ (paso 4) para algún } x \in A \end{cases}$

Ahora nos queda demostrar que $f(\alpha) = 0$. (esto lo lograremos eliminando las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$).

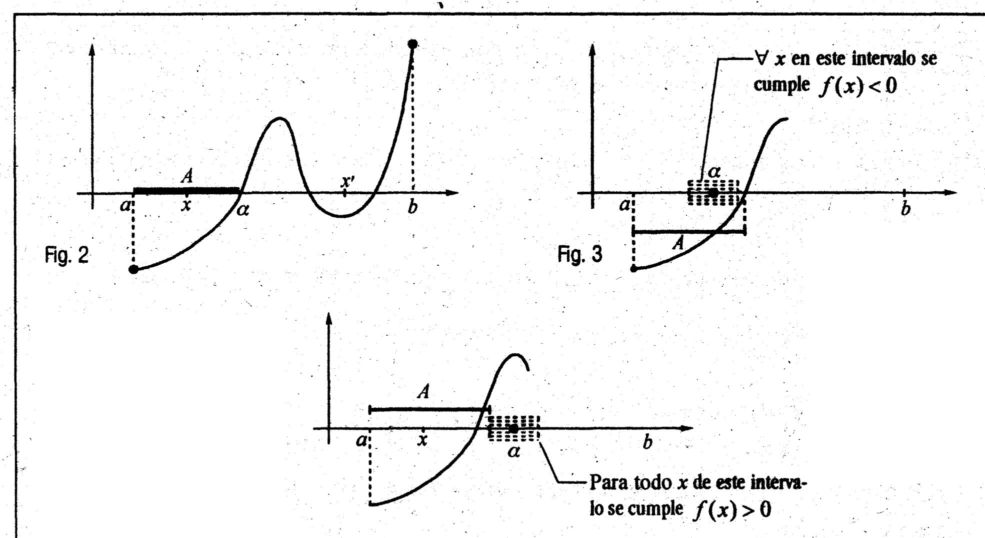
<u>Veamos</u>:

7) Supongamos que $f(\alpha) < 0$, por el **COROLARIO DEL TEOREMA** 5, existe un $\delta > 0$ tal que, $\boxed{f(x) < 0 \text{ para } \alpha - \delta < x < \alpha + \delta}$, $I_2 = \langle \alpha - \delta \, , \alpha + \delta \rangle$

Como $\alpha = \sup A \Rightarrow \exists$ algún $x_0 \in A$, tal que, $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$, $I_1 = \langle \alpha - \delta , \alpha \rangle$.

Como $I_1 \subset I_2$ se cumple que $f(x) < 0$ en todo $x \in [a, x_0]$. Pero si x_1 es un número, tal que, $\alpha < x_1 < \alpha + \delta = I_3 \subset I_2$, entonces $f(x) < 0$ en todo $x \in [x_0, x_1]$; puesto que $I_3 \subset I_2$ y en consecuencia $x_1 \in A$.

Pero esto contradice a la proposición p: "$\alpha = \sup A$", ya que hemos encontrado un $x_1 \in A$, tal que, $f(x) < 0$, $\forall \, x \in [x_0, x_1]$ donde: $\underbrace{x_0 \le \alpha \le x_1}_{[x_0,\alpha] \cup \langle \alpha, x_1]}$



Como vemos, en el intervalo $\langle \alpha, x_1]$ hay "muchos" elementos "x", tal que, $f(x) < 0$, pero estos "x" ya no pertenecen al conjunto A, puesto que $\alpha = \sup A$.
Luego la suposición de que $f(\alpha) \leq 0$, es falso.

8) Ahora, supongamos que $f(\alpha) > 0$, entonces por el teorema 5, existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que cumple:

$$|x - \alpha| < \delta \iff -\delta < x - \alpha < \delta$$

$$\iff \alpha - \delta < x < \alpha + \delta \qquad \text{(Ver Fig. 3)}$$

$$\iff x \in \langle \alpha - \delta, \alpha + \delta \rangle = I_4$$

Si $\alpha = \sup A \Rightarrow \exists$ **algún** $x_0 \in A$, tal que: $\alpha - \delta < x_0 < \alpha \iff x \in \langle \alpha - \delta, \alpha \rangle = I_5$

Como $I_5 \subset A \Rightarrow \boxed{f(x) < 0}$ para todo $x \in [a, x_0]$.

Pero $I_5 \subset I_4$, entonces deberá cumplirse qué $\underset{(**)}{\boxed{f(x) > 0}}$, $\forall x \in I_5$

9) Como vemos, hay contradicciones (*) con (**).
Pero esta contradicción ha ocurrido por la suposición **8**, luego la única posibilidad que queda, es que: $f(\alpha) = 0$.
Antes de demostrar el **TEOREMA 8** hagamos la demostración de un teorema preliminar.

TEOREMA 7 Si f es continua en "a" entonces existe un número $\delta > 0$, tal que f está acotado superiormente en el intervalo $\langle a - \delta, \alpha + \delta \rangle$.

<u>Demostración</u>:

1) Como f es continua en "a" $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, luego $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta \;\wedge\; x \in D_f$.

2) Como ε es arbitrario, hagamos $\varepsilon = 1$, entonces en (1) tendremos:

$\underbrace{|f(x) - f(a)| < 1}$ Siempre que: $|x - a| < \delta \;\wedge\; x \in D_f$

$$-\delta < x - a < \delta$$

$$-1 < f(x) - f(a) < 1 \qquad a - \delta < x < a + \delta$$

$$f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1 \qquad x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle \cap D_f$$

Como vemos $f(x)$ está acotado superiormente por $f(a) + 1$ y $f(a) - 1$ $\forall x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$.

TEOREMA 8 Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotado superiormente, en $[a,b]$. Es decir existe algún número real N, tal que: $f(x) \leq N$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Ver. Demostración en el libro Calculus Tomo I por M. Spivak.

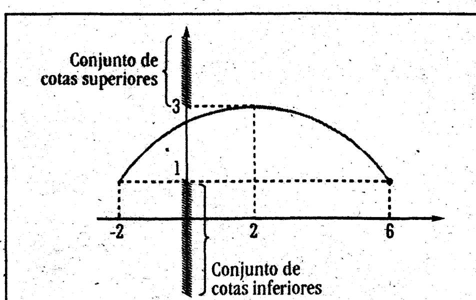
TEOREMA 9 Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe algún número "y" en $[a,b]$, tal que: $f(y) > f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Este teorema se enuncia también, diciendo "Si f es continua en $[a,b]$, entonces f tiene un máximo en $[a,b]$".

Ver. Demostración en el libro Calculus Tomo I por M. Spivak.

EJEMPLOS

1) Sea la función $f:[-2,6] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 3 - \frac{1}{8}(x-2)^2$, cuyo gráfico es:



En ésta función tenemos:

i) La menor de las cotas superiores es $f(2) = 3$, por lo tanto:

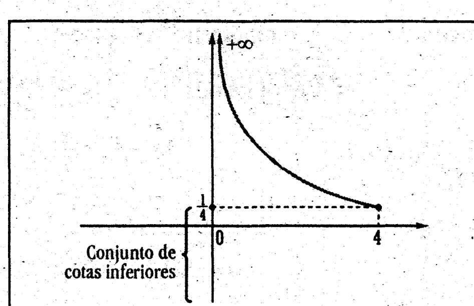
$$\sup f(x) = 3 = f(2).$$

ii) Como $f(2) \in \text{Rango}(f)$, entonces el máximo de $f(x)$ es $f(2) = 3$.

iii) La mayor de las cotas inferiores es $f(-2) = 1$, entonces $\inf(f) = 1$.

iv) Como $f(-2) = 1 \in \text{Rango}\, f$, entonces el mínimo de $f(x)$ es $f(-2) = 1$.

2) Sea la función $g:\langle 0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$, cuyo gráfico es:



En esta función, se tiene:

i) La función $g(x)$ no está acotado superiormente, por tanto no tiene supremo.

ii) La función $g(x)$ está acotado inferiormente, donde $\inf(g) = g(4) = \frac{1}{4}$.

iii) Además, $\text{mín}(g) = g(4) = \frac{1}{4}$.

4.8 CONTINUIDAD UNIFORME

Introducción: Analicemos el siguiente ejemplo, sea $f:\langle 0,1] \to I\!R$, definida por $f(x)=\frac{1}{x}$.

En esta función ocurre lo siguiente:

1. f es continua en cualquier punto de $\langle 0,1]=I$.

   Por ejemplo, f es continua en $x_0=\frac{1}{2}$ pues:

   Dado arbitrariamente $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta \wedge x\in\langle 0,1]$ implica $\left|\frac{1}{x}-2\right|<\varepsilon$.

Búsqueda de δ en términos de ε

$$\left|\frac{1}{x}-2\right|=\left|\frac{1-2x}{x}\right|=2\left|x-\frac{1}{2}\right|\frac{1}{|x|}$$

Acotemos: a) Por hipótesis $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$ .... (1)

b) Supongamos $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta\le\frac{1}{4}=\delta_1$

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$$

$$4>\frac{1}{x}>\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{|x|}<4$ .... (2)

(1) por (2) : $\left|x-\frac{1}{2}\right|\frac{1}{|x|}<4\delta$

Por 2 : $2\left|x-\frac{1}{2}\right|\frac{1}{|x|}<8\delta$

Haciendo $8\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{8}$ y eligiendo $\delta=\text{mín}\left\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{8}\right\}$

Queda demostrada la existencia de δ, que depende de $x_0=\frac{1}{2}$ y $\forall\,\varepsilon>0$, tal que $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$ implica $\left|\frac{1}{x}-2\right|<\varepsilon$.

Por ejemplo: Si $\varepsilon = 2$, entonces $\delta = \frac{1}{4}$

Si $\varepsilon = 1$, entonces $\delta = \frac{1}{8}$

Si $\varepsilon = 0.5$ entonces $\delta = \frac{1}{16}$.

De manera similar, podríamos encontrar, para cada número real $x_0 \in \langle 0,1]$ y para todo $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ que depende de x_0 y ε tal que $|x - x_0| < \delta \wedge x \in I$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Es decir f es continua en el intervalo $\langle 0,1]$, y su demostración radica en hallar $\delta > 0$ que dependerá de cada punto x_0, $0 < x_0 < 1$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Esto, es equivalente a la proposición siguiente:

Para cada $x_0 \in \langle 0,1]$ y $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon, x_0)$ tal que si:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \cap I \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$$

Lo que hemos hecho aquí, es haber analizado **LA CONTINUIDAD PUNTUAL** $f(x) = \frac{1}{x}$ para cada $x_0 \in \langle 0,1]$.

Ahora, planteemos la validez de la siguiente proposición:

P $\forall\, x, y \in \langle 0,1]$ y $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ en términos de ε, tal que $|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

En la función $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 0,1]$, la proposición (P) no se cumple.

Veamos:

Supongamos que hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < 1$ y elegimos $x = \delta$, $y = \frac{\delta}{5}$

Como $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $f(\delta) = \frac{1}{\delta}$, $f\left(\frac{\delta}{5}\right) = \frac{5}{\delta}$

Entonces $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{5}{\delta}\right| = \frac{4}{\delta}$

Como la proposición (P) es verdadero $\forall\, \varepsilon > 0$, en particular debe ser verdadero para $\varepsilon = 4$.

Pero : $|f(x)-f(y)| = \frac{4}{\delta} > 4$, $\forall\, \delta \in \langle 0,1 \rangle$

Debería ser : $|f(x)-f(y)| < 4 = \varepsilon$

y no : $|f(x)-f(y)| > 4 = \varepsilon$

Lo cual contradice la validez de la proposición (P).

Hemos demostrado que no es posible encontrar $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$ sea cual fuera $y \in \langle 0,1]$.

Nota:

si "y" es fijo, entonces se trata de una continuidad puntual. (es decir $y = y_0$, $f(y_0) = \frac{1}{y_0}$ con $0 < y_0 \le 1$)

¿Qué ha sucedido?

¿Se diluyó la definición puntual de continuidad?

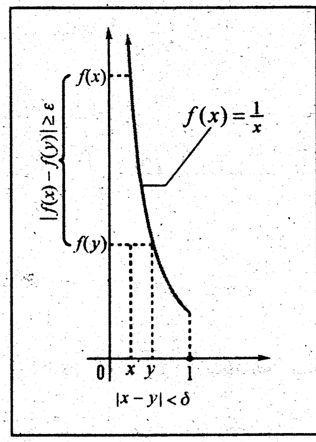
No, al contrario se ha "ampliado" la definición de continuidad puntual a continuidad interválica de una manera muy refinada. De la continuidad en un punto fijo x_0 pasamos a analizar la continuidad en dos puntos muy cercanos "x" e "y" que están variando dentro del intervalo $\langle 0,1]$.

Geométricamente, la proposición (P) nos dice: si "x" e "y" están muy cerca entre sí $(|x-y| < \delta)$, entonces "$f(x)$" y "$f(y)$" están, también cerca entre sí $(|f(x)-f(y)| < \varepsilon)$.

Esto no ocurre con la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando $x \in \langle 0,1]$.

Pues: si $x, y \in \langle 0,1]$ están muy cerca entre sí, implica que $f(x)$ y $f(y)$ están alejados entre si.

Es decir: $\forall\, x, y \in \langle 0,1]$, $|x-y| < \delta$ implica $|f(x)-f(y)| \ge \varepsilon$.



Este concepto nos conduce a una nueva definición de continuidad: ***la continuidad uniforme.***

Definición: Sea la función $f : A \to I\!R$

Diremos que f es **UNIFORMEMENTE CONTINUA** en A cuando $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in A \;\wedge\; |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Ejemplo 1. Sea la función $f : \langle 0,1] \to I\!R$, definida por $f(x) = x^2$

Probar que $f(x)$ es uniformemente continua en $\langle 0,1]$.

<u>Demostración:</u>

Aplicando la definición se tiene:

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in \langle 0,1] \;\wedge\; |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2-y^2| < \varepsilon$

Busquemos δ en términos de ε

(existencia de δ)

1) Partimos de : $|x^2-y^2|$

Se tiene : $|x-y||x+y|$

2) Acotemos:

a) Por hipótesis : $|x-y| < \delta$ .... (2a)

b) Para acotar : $|x+y|$, aplicar la hipótesis:

$$x \in \langle 0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$$
$$y \in \langle 0,1] \Rightarrow 0 < y \leq 1$$
$$0 < x + y \leq 2$$
$$\Rightarrow |x+y| \leq 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2b)}$$

3) Multiplicar (2a) por (2b): $|x-y||x+y| \leq 2\delta$

4) Haciendo $2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Hemos probado la existencia de δ en función de ε, lo cual prueba que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $\langle 0,1]$.

Por lo tanto es válida la siguiente proposición: $\forall\, x, y \in \langle 0,1]$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ implica $|x^2 - y^2| < \varepsilon$.

Ejemplo 2. Sea la función $f: I\!R \to I\!R$ definido por: $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
Probar que $f(x)$ es uniformemente continua en $I\!R$.

<u>Demostración:</u>

Aplicando la definición se tiene $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in I\!R \wedge |x-y| < \delta$ implica $|(ax+b)-(ay+b)| < \varepsilon$.

Búsqueda de δ en términos de ε

1) Partir de: $|(ax+b)-(ay+b)| =$
$= |a(x-y)| = |a||x-y|$

2) Acotar: Por hipótesis se tiene : $|x-y| < \delta$

Multiplicar por $|a|$: $|a||x-y| < |a|\delta$

3) Hacer: $|a|\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$

Ejemplo 3. Sea la función $f : I\!R \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Probar que $f(x)$ es uniformemente continua en $I\!R$.

Demostración:

Aplicando la definición: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in R \ \wedge\ |x - y| < \delta$ implica $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < \varepsilon$.

Búsqueda de δ en términos de ε

1) Partir de : $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$

Donde : $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left|2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right|$

$$= 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Por propiedad de arcos se tiene $\begin{cases} |\cos\mu| \le 1 \\ |\operatorname{sen}\mu| \le |\mu| \end{cases}$

Luego : $\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \le 1$

$\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \le \left|\frac{x-y}{2}\right|$

3) Al retornar en (2): $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le 2(1)\frac{|x-y|}{2} \le |x-y|$

4) Por hipótesis $|x - y| < \delta$, por tanto $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < \delta$

Haciendo $\delta = \varepsilon$, queda demostrado el problema.

⌖⌖⌖⌖⌖

Como se puede apreciar, existe una clara diferencia entre continuidad en un punto y continuidad uniforme, este último es un concepto aplicado a un intervalo.

Sea la función $f : A \to I\!R$, $A \subset I\!R$, $A =$ Intervalo. Si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua, el recíproco no es cierto.

A continuación enunciaremos los teoremas referentes a continuidad uniforme.

TEOREMA 10 Sea $f: A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Si (a_n) es una sucesión de Cauchy en A entonces $(f(a_n))$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración:

Debo demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$ tal que $m, n > \mathbb{N}$ implica $|f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon$.

Veamos:

1) Si f es uniformemente continua en A, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in A$; $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2) Si (a_n) es una sucesión de Cauchy en A, entonces dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}^+$ tal que:

$$m, n > \mathbb{N} \text{ implica } |a_m - a_n| < \delta$$

Nota:

Cuando se dice que (a_n) es una sucesión de Cauchy en A, significa que los términos a_m y a_n están en A.

---

3) En 1) se afirma que la proposición es verdadera para todo $x, y \in A$. Igualmente si (a_n) es una sucesión en A, implícitamente se entiende que todos los términos a_m, a_n están en A, entonces $|a_m - a_n| < \delta$ implica $|f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon$.

4) Por 2) y 3) concluimos:

Si $m, n > \mathbb{N} \Rightarrow |f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon$, es decir $(f(a_n))$ es una sucesión de Cauchy.

Corolario Sea $f: A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Para todo punto de acumulación $a \in A$, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Demostración:

Aplicar el Teorema 10.

1) Si es uniformemente continua en A, implica que para toda sucesión de puntos $x_n \in A - \{a\}$ tal que $x_n \to a$, se cumple que la sucesión $(f(x_n))$ es convergente por ser de Cauchy.

Entonces existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (según Corolario 2 del teorema 9 Capítulo 3).

❐ 4.9 FUNCIONES CONTINUAS EN CONJUNTOS COMPACTOS

Antes de entrar al estudio de funciones continuas que están definidas sobre un conjunto cerrado y acotado (compacto), estudiaremos ordenadamente los conceptos de familia de conjuntos, de cubrimiento de un conjunto y subcubrimiento.

1) Antes de definir la ***familia de conjuntos*** se da algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

Dado el conjunto $x = \{a,b,c\}$, el conjunto potencia de X es:

$2^X = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

Del conjunto 2^X se pueden obtener 2^8 conjuntos cuyos elementos son subconjuntos de X. Algunos de dichos subconjuntos son:

$$\mathcal{C} = \{\phi, X, \{a\}\}$$

$$\mathfrak{F} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

A los conjuntos $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{F}$ se les llama FAMILIA de conjuntos.

$\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos cuyos elementos son ϕ, X, $\{a\}$ que son subconjuntos de X.

$\mathfrak{F}$ es otra familia de conjuntos cuyos elementos son $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$.

Ejemplo 2.

Cuando se trabaja con familia de conjuntos se usa subíndices de tal manera que a cada subíndice λ corresponde un conjunto A_λ.

Veamos el siguiente ejemplo:

Del conjunto de intervalos abiertos $I_n = \left\langle 0, 1 + \frac{1}{n} \right\rangle$, $n \in I\!N^+$ podemos elegir las siguientes familias de conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{I_1, I_3, I_5\}$$

$$\mathcal{B} = \{I_1, I_2\}$$

$$C = \{I_2, I_3, I_4\}\text{ , etc.}$$

$I_1 = \langle 0,2 \rangle$, $I_2 = \left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$, $I_3 = \left\langle 0, \frac{4}{3} \right\rangle$, $I_4 = \left\langle 0, \frac{5}{4} \right\rangle$, $I_5 = \left\langle 0, \frac{6}{5} \right\rangle$

a) En la familia de conjuntos *A* se puede notar la correspondencia siguiente:

al subíndice 1 corresponde el conjunto I_1
al subíndice 3 corresponde el conjunto I_3
al subíndice 5 corresponde el conjunto I_5

Es decir ha quedado definido la función *I* de $L=\{1,3,5\}$ en $\mathcal{A}=\{I_1,I_3,I_5\}$.

Así I: $L \to \mathcal{A}$
$\lambda \to I_\lambda$

En este caso la familia de subconjuntos $\mathcal{A}$ se puede denotarse por $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$, $\lambda=1,3,5$

b) Con la misma modalidad la familia $\mathcal{B}$ se denota por $(I_j)_{j\in J}$, siendo $J=\{1,2\}$, $J=1,2$.

c) La familia *C* se denota por $(I_i)_{i\in I}$, donde $I=\{2,3,4\}$, $i=2,3,4$.

Ahora ya podemos definir una familia de conjuntos.

Definición: Sea L un conjunto de índices.
Una familia de conjuntos con índices en L es una función $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ tal que "a cada $\lambda\in L$ corresponde un conjunto A_λ".

La familia de conjuntos puede ser finita o infinita, Lo que nos interesa es la unión y la intersección de los conjuntos A_λ que pertenece a una familia.

a) **Reunión de la familia** $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$

Definición: $\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda=\{x/\exists\,\lambda\in L \text{ con } x\in A_\lambda\}$

b) **Intersección de la familia** $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$

Definición: $\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda=\{x/x\in A_\lambda,\forall\,\lambda\in L\}$.

Ejemplo 3.

Dada la familia $(A_n)_{n\in N}$ tal que $A_n=\langle -n,n\rangle$, se cumple: $\bigcup\limits_{n\in N} A_n=\mathbb{R}$

Ejemplo 4.

Sea $[1,2]$ un intervalo cerrado.

Dado una familia $(I_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tal que: $I_n = \left[1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]$

Se cumple: a) $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} I_n = [1,2]$ b) $[1,2] \subset \bigcup_{n\in \mathbb{N}} I_n$

2) Un ***cubrimiento*** de un conjunto dado $A \subset \mathbb{R}$ es una familia $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$, tales que $A \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$, esto es:

Si $x \in A \Rightarrow \exists\, \lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

En el ejemplo, $(I_n)_{n\in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $[1,2]$.

3) Un ***subcubrimiento*** de C es una subfamilia $C' = (C_\lambda)_{\lambda\in L'}$, $L' \subset L$ tal que $A \subset \bigcup_{\lambda\in L'} C_\lambda$.

En el ejemplo 4. $C = \{I_1, I_2, I_3\}$ es subcubrimiento de $[1,2]$.

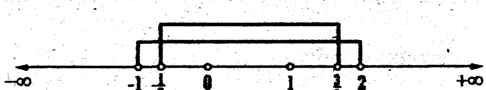
Proposición 1 (Teorema de Borel-Lebesgue)
Todo cubrimiento de $[a,b]$ por medio de intervalos abiertos admite un subcubrimiento finito.

Ejemplo 5.

Dado el intervalo cerrado $[0,1] \subset \mathbb{R}$ y la familia de intervalos abiertos $(I_n)_{n\in \mathbb{N}^+}$ tal que:

$$I_n = \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right\rangle,\ I_n \subset \mathbb{R}$$

La familia $(I_n)_{n\in \mathbb{N}^+}$ es un cubrimiento de $[0,1]$ porque $[0,1] \subset \bigcup_{n\in \mathbb{N}^+} I_n$



Tomando $L' = \{1,2,3,4\} \subset \mathbb{N}^+$ tenemos la subfamilia finita $C' = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ el cual es un subcubrimieto de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$, pues $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{4} I_i$.

Ejemplo 6.

Un cubrimiento de $\mathbb{R}$ es la familia $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $I_n = \langle -n, n \rangle$, puesto que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in N} I_n$.

sin embargo la familia $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ no admite un subcubrimiento finito.

3) CONJUNTO COMPACTO A

Definición: Sea el conjunto $K \subset \mathbb{R}$

Decimos que el conjunto K es **COMPACTO** si todo cubrimiento abierto de K posee subcubrimiento finito.

Ejemplos:

1. En la recta real, todos los intervalos cerrados son compactos.

2. En el espacio $\mathbb{R}^2$, las bolas cerradas (discos cerrados) son conjuntos compactos.
Un disco cerrado es un círculo de centro en x_0 y de radio $r > 0$ incluido la circunferencia. se expresa por: $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x - x_0| \leq r\}$

3. En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| \geq r\}$ es un conjunto cerrado, pero no es acotado.

He aquí una diferencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, mientras que en $\mathbb{R}$ todos los intervalos cerrados son compactos, en $\mathbb{R}^2$ no ocurre tal cosa.

Hay una proposición (Teorema) que nos permite definir un conjunto compacto de 4 formas.

Proposición 2 Sea un conjunto $K \subset \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. K es compacto, si todo cubrimiento abierto de K posee subcubrimiento finito.

2. K es compacto, si es cerrado y acotado.

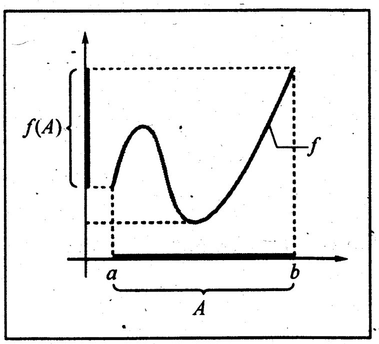
3. K es compacto, si todo subconjunto infinito de K posee puntos de acumulación pertenecientes a K.

4. K es compacto, si toda sucesión de puntos de K posee una subsucesión que converge hacia un punto de K.

En el **ANÁLISIS REAL** las afirmaciones 1,2 y 4 se aplican con relativa frecuencia.

TEOREMA 11 Sea la función $f: A \to \mathbb{R}$ continua en A. Si A es compacto entonces $f(A)$ es compacto.

<u>Demostración</u>:



En este Teorema, A es el dominio y $f(A)$ es el rango, donde $f(A) \subset \mathbb{R}$.

Hay dos hipótesis: 1) f es continua en A

2) A es compacto.

Para afirmar que $f(A)$ es compacto, en primer lugar, se supone que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una familia de intervalos abiertos tal que $f(A) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$, es decir $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ es un cubrimiento abierto de $f(A)$, donde cada C_λ es un intervalo abierto en el eje Y.

Debo probar que existe un subcubrimiento finito $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ tal que $f(A) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L'} C_\lambda$

La demostración radica en construir cuidadosamente el subcubrimiento C' en base a la hipótesis que A es compacto y f es continua.

Veamos:

1. Dado un cubrimiento $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de $f(A)$ se cumple $f(A) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$ y para cada $x \in A$, podemos elegir el conjunto $C_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in C_{\lambda(x)}$.

2. Como f es continua en A, entonces para cada $x \in A$ se cumple:

Si $y \in A \cap \underbrace{\langle x-\delta, x+\delta \rangle}_{I_x} \Rightarrow f(y) \in \underbrace{\langle f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon \rangle}_{C_{\lambda(x)}}$

3. Obtenemos así un cubrimiento abierto (I_x), tal que $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} I_x$.

4. Como A es compacto, podemos extraer de (I_x) un subcubrimiento finito (I_{x_i}) tal que $A \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \ldots \cup I_{x_n}$, lo cual implica:

$$f(A) \subset f(I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_n})$$
$$f(A) \subset f(I_{x_1}) \cup \ldots \cup f(I_{x_n})$$
$$f(A) \subset \underbrace{C_{\lambda(x_1)} \cup \ldots \cup C_{\lambda(x_n)}}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_{\lambda(x_i)}}, \text{ donde } f(I_{x_i}) \subseteq C_{\lambda(x_i)}$$

5. Si $f(A)$ esta incluido en la unión finita de una subfamilia, prueba que $f(A)$ es compacto.

⌖⌖⌖⌖⌖

Corolario Toda función continua $f: A \to I\!R$ definida en un COMPACTO A es acotada y contiene a su máximo y mínimo (esto es, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall\, x \in A$.

<u>Demostración:</u>

Las hipótesis del corolario son: P_1 : A es compacto

P_2 : f es continua en A

P_3 : $f(A)$ es el rango de f.

Por demostrarse que existen dos números $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son el ínfimo y el supremo de f, respectivamente, y pertenece al rango de f.

Veamos:

1. Si A es compacto $\Rightarrow$ $f(A)$ es compacto .... (Teorema 11)

2. Si $f(A)$ es compacto $\Rightarrow$ $f(A)$ es cerrado y acotado (proposición 2)

3. Porque $f(A)$ es acotado, tiene supremo e ínfimo y porque $f(A)$ es cerrada, se cumple que:

   i) $\sup f(A) \in f(A)$
   ii) $\inf f(A) \in f(A)$

   Por tanto, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $\inf f(A) = f(x_1)$ y $\sup f(A) = f(x_2)$.

Ejemplos aclaratorios:

1) Sea la función $f : \langle -2,2 \rangle \to I\!R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$ se tiene:

   a) $\langle -2,2 \rangle$ es un conjunto acotado, pero f no es acotada, porque $f(\langle -2,2 \rangle) = [0,+\infty\rangle$ no es acotada.
   b) f es continua en $\langle -2,2 \rangle$.

2) Sea la función $g : \langle -2,2 \rangle \to I\!R$ definida por $g(x) = x^2$ se tiene:

   a) g es continua en $\langle -2,2 \rangle$.

   b) $\langle -1,2 \rangle$ es acotada.

   c) g es acotada, porque $g(\langle -2,2 \rangle) = [0,4\rangle$ es acotada. Pero $g(\langle -2,2 \rangle)$ no es compacto. Además $\inf g(x) = 0$ y $\sup g(x) = 4$.

   d) g tiene valor mínimo pero no tiene máximo, $\text{mín } g = f(0) = 0$.

3) Sea la función $h : [-1,2] \to I\!R$ definida por $h(x) = 1 - 2x$, se tiene:

   a) h es continua en $[-1,2]$.

   b) $[-1,2]$ es compacto.

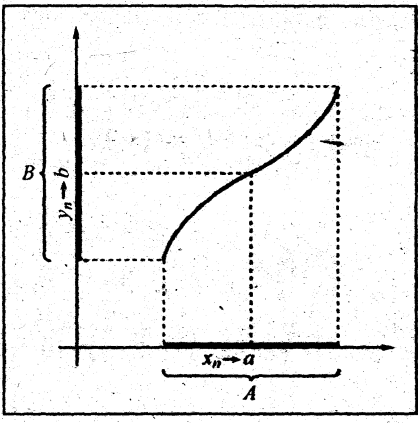
   c) f es acotada en $[-1,2]$ porque $f([-1,2]) = [-3,3]$ es acotada.

   d) $f([-1,2])$ es compacto y por tanto contiene a su ínfimo y supremo.

      i) $\inf f([-1,2]) = -3 \in f([-1,2])$
      ii) $\sup f([-1,2]) = 3 \in f([-1,2])$

TEOREMA 12. Sea A compacto, $A \subset \mathbb{R}$. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva entonces $B = f(A)$ es compacto y la función inversa $f^{-1}: B \to \mathbb{R}$ es continua.

Demostración:



Para la demostración se requiere la definición de punto de adherencia.

Definición:
Diremos que un punto "a" es adherente a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando "a" es el límite de una sucesión de puntos $x_n \in A$, es decir $x_n \to a$.

Las hipótesis del Teorema son:

P_1 : A es compacto

P_2 : f es continua en A

P_3 : f es inyectiva en A

Por demostrarse que:

q_1 : $f(A)$ es compacto.

q_2 : f^{-1} es continua.

1. Por el Teorema 11, queda probado q_1.

2. Faltaría demostrarse q_2.

Veamos:

3. Sea $b = f(a)$. Para afirmar que f^{-1} es continua en cualquier punto $b \in B$ se hace lo siguiente:

   Considerar una sucesión de puntos $y_n \in f(x_n) \in B$ tal que $y_n \to b$. Debo probar que $f^{-1}(y_n) = x_n \to a = f^{-1}(b)$.

4. Como $x_n \in A$ y A es compacto (cerrado y acotado), entonces la sucesión (x_n) es acotada.

5. Si (x_n) es acotada, entonces posee una subsucesión convergente (según Corolario).

6. Debo probar que "a" es único punto de adherencia de (x_n). Según el paso 5, sea (x'_n) una subsucesión que converge al punto a'.

Por demostrar que $a' = a$

7. Como A es compacto se cumple que $a' \in A$. además $y'_n = f(x'_n)$ converge hacia b (por ser y'_n subsucesión).

8. Como f es continua en A, en particular será continua en a' y tenemos $f(a') = \lim(x'_n) = b$.

9. Porque f es inyectiva $f(a') = f(a) = b$ implica $a' = a$.

lqqd

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS PROPUESTOS

I. PUNTOS DE ACUMULACIÓN

1. En el intervalo abierto $I = \langle a,b \rangle$, $a < b$
   ¿a es punto de acumulación de I?; ¿b es punto de acumulación de I?;
   ¿Cualquier número x, tal que $a < x < b$, es punto de acumulación de I?

2. Dado el conjunto $A = \{0,1,2,3,\ldots\}$. ¿Tiene A puntos de acumulación?

3. Dado el conjunto $A = \langle -3,2] \cup \{3\} \cup [4,5\rangle$. ¿Es 3 punto de acumulación de A?

4. Sea $A = \left\{ x_n = \frac{1}{n} / n \in I\!N^+ \right\}$. Hallar los puntos de acumulación de A, si tiene.

5. Sea $B = \left\{ x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n} / n \in I\!N^+ \right\}$. ¿Tiene B puntos de acumulación?, si tiene, hállelos.

6. Dado el conjunto $A = \left\{ x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n / n \in I\!N^+ \right\}$. Hallar los puntos de acumulación de A, si tiene.

7. Dado $A = \left\{ x_n = (-1)^n + \frac{1}{n} / n \in I\!N^+ \right\}$. Halle los puntos de acumulación de A, si tiene.

8. Dados los conjuntos $A = \left\{ x_n = \frac{2n+1}{n} / n \in I\!N^+ \right\}$ y $B = \left\{ x_n = \frac{1-2n}{n} / n \in I\!N^+ \right\}$. Hallar los puntos de acumulación de $A \cup B$.

II. SUCESIONES

1. Analizar si existe el supremo y/o ínfimo del conjunto:
   $A = \left\{ a_n = \frac{[\![nx]\!]}{n}, n \in \mathbb{Z}^+, x \in I\!R \text{ (fijo)} \right\}$

2. a) Sean $A \subset I\!R$, $B \subset I\!R$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, acotados superiormente:

   Demostrar que: *i)* $A \cup B$ es acotado superiormente.
   ii) $\sup (A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\}$

b) Hallar el supremo y el ínfimo (si existe) del conjunto: $A=\left\{a_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{2^n}, n\in Z^+\right\}$

3. Sea $A=\{a_n / n\in \mathbb{Z}^+\}$ donde: $a_1=\sqrt{2}$

$$a_{n+1}=\sqrt{2-a_n}\ ,\ \forall\, n\in Z^+$$

Hallar el supremo y el ínfimo de A.

4. Sea $A=\{a_n / a_n=1+r+r^2+\ldots+r^n\}$, $0<r<1$, $n\in \mathbb{Z}^+$

Demostrar: $\sup A=\frac{1}{1-r}$

$\inf A=1+r$

5. Sea $A=\left\{n+\frac{(-1)^n}{n} / n\in I\!N^+\right\}$. Determinar el ínfimo de A, justificando su respuesta.

6. Sea el conjunto $A=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} / n\in I\!N^+\right\}$. Demostrar, por definición que $\inf A=1$.

7. Sea $A=\{x_n / n\in I\!N^+\}$ en donde: $x_1=2$

$$x_n=2\sqrt{x_n-1}\ ,\ \forall\, n>1$$

Hallar $\sup(A)$ y justificar usando la definición.

8. Demostrar que $\sup(A)=2$, si: $A=\left\{x_n\in I\!R / x_n=\frac{2n-1}{n}, n\in I\!N^+\right\}$

9. Sea $A=\left\{x_n=(-1)^n\left(2-\frac{1}{n}\right) / n\in I\!N^+\right\}$

Hallar $\inf A$ y $\sup A$. Hacer la demostración correspondiente al supremo

10. Si $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}$

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y que $\frac{1}{2}\le \lim\limits_{n\to\infty} a_n\le 1$

Sugerencia: Probar que $a_{n+1}\le a_n$, $\forall\, n\ge 1$.

11. Dada la sucesión $(a_n)=\left(\frac{5-n^2}{3n}\right)$, determinar si existe un entero positivo n_0 tal que $n>n_0 \Rightarrow a_n<-200$.

En caso que exista, determinar el menor valor que n_0 puede tomar.

12. Sea (a_n) una sucesión definida por recurrencias mediante:

$$a_1=2$$
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+4),\ n\geq 1$$

a) Demostrar que $a_n<4$, $\forall n\in \mathbb{N}^+$.
b) Demostrar que es estrictamente creciente.
c) Hallar $\text{Sup}\{a_n / n\in \mathbb{N}^+\}$.

13. Si $a_n=\dfrac{(\text{sen}\sqrt{n+2})^3-(\text{sen}\sqrt{n})^3}{\cos^2\sqrt{n+2}+\cos^2\sqrt{n}-\text{sen}\sqrt{n}\,\text{sen}\sqrt{n+2}-2}$. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Sugerencia: Aplicar $|\text{sen}\,x-\text{sen}\,y|\leq |x-y|$, $\forall\, x,y\in \mathbb{R}$

14. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, con $a_n\neq a$, $b_n\neq a$ y suponga que para cada $\varepsilon>0$, $\exists\, \mathbb{N}\in \mathbb{R}$ tal que $|a_n-b_n|<\varepsilon$, $\forall\, n>\mathbb{N}$.

Demuestre que: si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=L$.

15. Sea (a_n) la sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2n+1}{n}, & \text{si } n \text{ es par}\\[2mm] \dfrac{2n-10}{n}, & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

i) Responder: ¿(a_n) es convergente?
ii) Demostrar rigurosamente su respuesta en (*i*)

III LÍMITES DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ***R.*** 1

2. $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{[\![x]\!]-x}{3-x}$ ***R.*** $-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sqrt{1-\cos x}}{x^2\log|x|+3\operatorname{tg} x}$ ***R.*** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}e-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x}{\cos x-1}$

5. $x\to+\infty$

$$f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}$$

respecto a $\frac{1}{x}$, calcular:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^5}$ ***R.*** $-\frac{1}{5}$

6. Estudiar la variación de P en el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{PX}+\log|x|^P}{x}$$

Solución:

Cuando: $x\to+\infty$

Si $P>0 \Rightarrow \lim=+\infty$

Si $P=0 \Rightarrow \lim=0$

Si $P<0 \Rightarrow \lim=0$

Cuando: $x\to-\infty$

Si $P>0 \Rightarrow \lim=0$

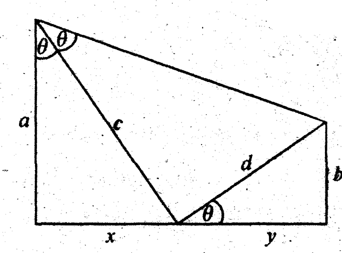
Si $P=0 \Rightarrow \lim=0$

Si $P<0 \Rightarrow \lim=-\infty$

7. $\lim\limits_{x\to 2\sqrt{2}}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-2}{x^2-8}$

8. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$

9. En la figura:



Calcular: $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{a-b}{c-d}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{x^3+4x^2}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}\right]$

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+1)^2+3x^2+3x-15}{\operatorname{tg}\pi(x-1)+\operatorname{cotg}\pi(x-1)\operatorname{sen}^2 2\pi(x-1)}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\operatorname{Arcsen} x}{2x+\operatorname{Arctg} x}$

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan\left(x^2-\frac{\pi^2}{16}\right)}{\operatorname{sen}(4x-\pi)}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2[(a+b)x]}{\sqrt{x^2+x+a}-\sqrt{x+a}}$

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}\pi x}$

20. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{\tan(x-a)}{x^2-ax}\right]^{\frac{a}{|x-a|}}$, $a>1$

21. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{9-x}\right)^{\frac{1}{2-\sqrt[3]{x}}}$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+2}-x^{n+1}-(n+1)x^n+x+1}{x^2-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$, $n\in\mathbb{Z}^+$

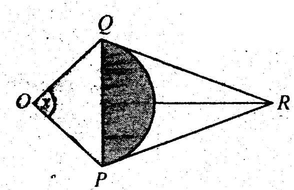
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{(3+4\cos 2x+\cos 4x)x^4}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\tan 4\pi x+\cos\pi x+\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\operatorname{sen}^2(x-1)}\right](x^2+2x-3)$

25. $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)^{\frac{2}{x-1}}$

26. En la figura OQP es un arco de circunferencia de radio 1, $\overline{RP}$ y $\overline{RQ}$ son tangentes al arco. Si S_1 es área del triángulo PQR y S_2 es el área del sector sombreado.

Calcular: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{S_2}{S_1}$



27. a) Sea f y g dos funciones, tales que: g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$.

Demostrar que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))$

b) Si: $f(x)=\begin{cases}(2-x)^2+1 \ , \ x\geq 0 \\ 3x+5 \ , \ x<0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \ , \ x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0\end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$

c) Dar un ejemplo de dos funciones f y g, tales que:

i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, $b\in \mathbb{R}$

ii) f no es continua en b

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))\neq f(b)$

28. Desde el punto A con abscisa $x\in[1,4]$, ubicado en la gráfica de $f(x)=x^2-4x+6$ se traza una recta paralela al eje X, que corta a la recta $y=x$ en el punto B. Desde el punto B se traza una recta paralela al eje Y, que corta a la gráfica de $g(x)=4\sqrt{x}$ en el punto C. Si desde el punto C se traza una recta paralela al eje X, se determina que ésta corta a la recta paralela al eje Y y que pasa por A, en el punto $(x,h(x))$.

Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-\sqrt{x^2+14x}+x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

29. Usando la definición de límite, demostrar que:

$$\lim_{x\to x_0}(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}=(ax_0^2+bx_0+c)^{\frac{1}{2}},\ b^2-4ac<0$$

30. Sea $f:\langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$, $x_0\in\langle c,d\rangle$ tal que $\forall\, x\in\langle c,d\rangle$, $|f(x)|<M$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, $L\in\mathbb{R}$. Demostrar que $|L|\leq M$.

31. Sea f una función real, x_0 un punto de acumulación del $\operatorname{Dom}(f)$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, $L\in\mathbb{R}$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f^2(x)}=\sqrt[n]{L^2}$, $n\in\mathbb{Z}^+$.

32. Sea $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ tal que $\forall\, a\in\mathbb{R}-\{0\}$, at_0 es punto de acumulación de I. Demostrar: $\lim\limits_{t\to t_0} f(at)=L \iff \lim\limits_{x\to at_0} f(x)=L$.

33. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Demuestre que: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \lim\limits_{x\to a} f(x)$

34. Demostrar usando la definición de límite que: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = 2$

35. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = -\infty$

36. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x+1}{x^2-3x+1} = -6$

37. Sean f y g funciones de variable real: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1,\ L_1 \in \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2,\ L_2 \in \mathbb{R}^+$

Demostrar que $\exists\, a, b, \delta \in \mathbb{R}^+$, tales que: $\left(0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in \text{Dom}\,\dfrac{f}{g}\right) \Rightarrow a < \dfrac{f(x)}{g(x)} < b$

38. Demostrar por definición, el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x+5} = 0$

39. Calcular: a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot Ln(\operatorname{sen} x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(4(1+Lnx)^2 - \dfrac{2}{x}\right)$

40. Si $f(x) = \dfrac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}$ Determinar: a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

41. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2[(a+b)x]}{\sqrt{x^2+x+a}-\sqrt{x+a}}$

42. Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x(1-x)^{\frac{1}{x}}$

◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

IV. PROBLEMAS TEÓRICOS SOBRE LIMITES

• 1. Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2}{2-x}}=1$

2. Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto $I\subset I\!R$, tales que:

   i) $\lim_{t\to a} g(t)=0$, $a\in I$

   ii) $|f(t)-f(a)|\le \text{A}g(t)$; $\forall\, t\in I$, $A\neq 0$ (constante)

   Demostrar (usando definición de límite) que:

   a) $\lim_{t\to a} f(t)=f(a)$

   b) $\exists\, M>0$ y $\exists\, \delta>0 : \forall\, t\in\langle a-\delta,a+\delta\rangle-\{a\} \Rightarrow |f(t)|\le M$

3. Sean f y g funciones reales y $C\in I\!R^+$, tales que: $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=C$. Si $f(x)$ tiende a 0 a través de valores negativos, demostrar que: $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

4. Sean f y g funciones reales, tales que: $\lim_{x\to +\infty} f(x)=L$ y $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, demostrar que $\lim_{x\to a} f(g(x))=L$, $L\in I\!R$.

5. Sean f y g funciones definidas sobre el intervalo abierto $\langle a,b\rangle$, excepto posiblemente en x_0, $a<x_0<b$.

   Si $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. Demostrar que $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

6. Sean f y g funciones reales, definidas en un intervalo abierto I, $x_0\in I$ tal que:

   i) $g(x)>0$, $\forall\, x\in I$ *ii*) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ existe y es positivo.

   Demostrar que $\exists\,\delta\in I\!R^+$, $\exists\, L_1\in I\!R^+$, $\exists\, L_2\in I\!R^+$ tal que:

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow L_1 g(x)\le f(x)\le L_2 g(x)$$

7. Sobre el eje X; se considera el conjunto $A=[0,1]\cup[2,3]$. Si $D(x)$ representa a la distancia mínima entre un punto cualquiera del eje X, con coordenada x, y un punto cualquiera de A.

Analizar la existencia de $\lim\limits_{x\to a} D(x)$, para $a=0,1,2,3$.

8. Sean f y g dos funciones tales que: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $|g(x)|<M \quad \forall\, x\in I\!R$, $(M>0)$.

Demostrar que: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$.

9. Al demostrar rigurosamente que: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+5}{5x+6}=3$ se tiene que dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $0<|x+1|<\delta \;\Rightarrow\; \left|\dfrac{2x+5}{5x+6}-3\right|<\varepsilon$. Analizar si δ puede ser mayor que 0.2:

10. Sea $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; analizar si existe $\delta>0$, tal que:

$$0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; 0.1<f(x)<0.3$$

V. LÍMITES CUANDO $x\to+\infty$ Y $\lim\limits_{x\to x_0} f=\pm\infty$

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1}-ax^3-bx\right)=0$. Hallar a y b.

2. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ si:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{8x^9+3x^4+1}+\sqrt[5]{x^{10}+x^2+1}+10}{\sqrt[4]{x^4+x^2+1}+\sqrt[4]{x^{12}+x^2+1}-10}, & x\ge 1\\[2ex] \dfrac{x^2+3\sqrt{x^2+1}+5}{x+3}-x+\dfrac{5}{x^2+x-1}, & x<-1\end{cases}$$

3. Bosquejar el gráfico de: $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{3+x}{x}} & , x<-3 \\ \dfrac{x+1}{x-2} & , -3\leq x<2 \\ \dfrac{x^3+3}{\sqrt{x^2-4}} & , x\geq 2 \end{cases}$

indicando dominio, intersecciones con los ejes y asíntotas.

4. Sean: $I=\langle a,b\rangle$ un intervalo abierto y $f:I\to \mathbb{R}$, $g:I\to \mathbb{R}$, dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=c$, $C<0$

Demostrar que: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,g(x)=-\infty$.

5. Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$

6. Demostrar por definición que sí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)=+\infty$.

7. Sea f una función que cumple: *i)* $y=3x+5$ es una asíntota (derecha) del gráfico de *f*.
ii) $f(x)=f(-x)$, $\forall\, x\in \mathbb{R}$

Calcular: a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{3x^2+\operatorname{sen} x}}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{3x^2+\operatorname{sen} x}}$

8. Sean f y g dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Demostrar que si $c<0$ y $g(x)$ tiende a 0 con valores negativos, entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

9. Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+10\operatorname{sen}x)=+\infty$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L<0$.

Demostrar, por definición que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ g(x)=-\infty$

11. Sean f, g, h tres funciones con dominios en $I\!R$, sea $c\in I\!R^+$ tal que $f(x)\le g(x)\le h(x)$, $\forall\, x>c$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L$.

12. Demostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)=-\infty$

13. Sean f y g dos funciones tales que:

i) $a\in I\!R$ tal que $\forall\, x\in\langle-\infty,0\rangle$ se cumple $|f(x)|\le k$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

Demostrar que: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

14. Si la recta $y=2x-3$ es asíntota oblicua derecha de la gráfica de la función f, calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{\sqrt[3]{2x^3+6(\operatorname{sen}^3x+x^2[\![x]\!])}}$$

15. Calcular $a,b\in I\!R$ tales que:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{3x^2-x^3}-ax-b)=0$$

16. Se circunscribe un polígono regular de n lados en una circunferencia de radio R. Si P es el perímetro del polígono, hallar $\lim\limits_{n\to+\infty}P$.

17. Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}\right)^{x+h}$, $a,b,c,h\in I\!R$

18. Sea f y g funciones, tales que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=L$, $L\in I\!R^+$

Demostrar, empleando definiciones, que: $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-g(x))=+\infty$

19. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{3x^2}$

20. Sea $x=b>0$ una asíntota del gráfico de una función f continua en $[a,b\rangle$.

Demostrar que si $f(x)\geq 0$ para todo x y $f(0)=0$, entonces $\forall\, c>0$, $\exists\, x_0\in[0,b\rangle$ tal que $f(x_0)=c$.

⌖ ⌖ ⌖ ⌖ ⌖ ⌖

VI. CONTINUIDAD

1. Analizar la continuidad de f, sí:

i) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2nx}{1-nx}$

ii) $f(x)=\sup\{g(t)/t\leq x\}$, donde $g(x)=2-x^2$

2. Sea $f:[a,b]\to I\!R$ una función continua e inyectiva en $[a,b]$ tal que $f(a)<f(b)$. Demostrar que: $\forall\, x,y\in[a,b]$ con $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

3. Analizar la continuidad de las siguientes funciones, en caso de discontinuidad removible redefinir la función de tal forma que sea continua,

a) $$f(x)=\begin{cases} x\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right], & 0<x\leq 1\\ 0, & x=0\\ 2-\frac{2-x}{x-[\![x]\!]}, & -2\leq x<0\end{cases}$$. En $[-2,1]$

b) $f(x)=2x[\![x]\!]+x^2[\![-x]\!]$ en $[-n,n]$, $n\in\mathbb{Z}^+$. Además graficar $f(x)$ para $n=3$

4. Sea f una función definida por: $f(x)=\begin{cases} g(x) \ , \text{ si } \ a\leq x<b \\ h(x), \text{ si } \ b\leq x\leq c \end{cases}$

Si g es continua en $[a,b\rangle$ y h es continua en $[b,c\rangle$.

¿Es f continua en $[a,c]$?

Si su respuesta es sí; demuestre su afirmación; en caso contrario qué condiciones adicionales aseguran la continuidad de f en $[a,c]$.

5. Hallar el valor de k (si existe) para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} [\![\frac{1}{x}]\!]-\frac{8}{3} \ , \ x>0 \\ K \ , \ x=0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[5]{x^5+1}+x^3-2}{x-x\sqrt{x^2+1}} \ , \ x<0 \end{cases}$$

R. $K=-\frac{8}{3}$

6. Sea f una función, tal que:

$\forall\, \varepsilon>0 \,, \ \exists\, \delta>0 \,/\, 0<|h|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x_0+h)-f(x_0-h)|<\varepsilon$

Analizar la continuidad de f en x_0.

7. Demostrar que la función: $g(x)=\begin{cases} -c \ , \text{ si } \ f(x)<-c \\ f(x) \ , \text{ si } |f(x)|\leq c \\ c \ , \text{ si } \ f(x)>c \end{cases}$

es continua en $\mathbb{R}$, si f es continua en $\mathbb{R}$.

8. a) Sea f una función tal que: $\forall\, a,b\in\mathbb{R},\ a<b \ \Rightarrow \ f(a)\leq f(b)$
Demostrar que f no tiene discontinuidades removibles (evitables).

b) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)=a+b=f(b)$
Demostrar que $\exists\, c\in[a,b]$ tal que: $f(c)=2c$.

9. Sean f y g funciones continuas en "c" tales que $f(c)<g(c)$.
Demostrar que $\exists\,\delta>0$ tales que:
$f(x)<g(x)\,,\ \forall\, x\in(\langle c-\delta,c+\delta\rangle\cap \text{Dom}(f)\cap \text{Dom}\, g)$

10. Esbozar la gráfica de la función $y = f(x)$ analizando asíntotas y continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} , & x < -2 \\ \dfrac{2x^3+3x+1}{x^2-x-6} + \sqrt{x^2+6} , & -2 < x < 3 \\ \dfrac{3x}{x+2} + 3 , & x \geq 3 \end{cases}$$

11. Sean $m, n \in Z^+$; sea $f(x) = \left(\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1} \right), \ x \neq 2$.

a) ¿$\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$? Pruebe.

b) Redefina $f(x)$ para que sea f continua en $x = 2$.

12. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2[\![\frac{1}{x}]\!]} , & x < -4 \\ \dfrac{3 + [\![\frac{x}{4}]\!]}{x+10} , & -4 \leq x < \frac{3}{2} \\ \dfrac{2x+5}{x+1} , & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

Analizar la continuidad de f y esbozar el gráfico, indicando dominio y asíntotas.

13. Sea $f : I\!R \to I\!R^+$ una función continua en cero, tal que para todo $x, y \in I\!R$ se cumple que $f(x+y) = f(x) f(y)$ demostrar que f es continua en $I\!R$.

14. Analizar la continuidad de: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - [\![\frac{1}{x}]\!]} , & x < 1 \\ \sqrt{x - [\![x]\!]} + [\![x]\!] , & x \geq 1 \end{cases}$ y esbozar la gráfica.

15. Analizar la continuidad en $I\!R$ y graficar la función $f(x) = x + [\![x^2]\!]$.

16. Analizar la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 1 - x + [\![x]\!] , & x \geq 0 \\ |x+1| , & x < 0 \end{cases}$

17. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ que posibiliten la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2} & , \ x<-2 \\ ax^2-2bx+1 & , \ -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x^2-13x+22}{x-2} & , \ x>2 \end{cases}$$

18. Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas tal que $a<0<b$.

$$f(x)\geq 0, \ \forall x\in \mathbb{R} \text{ con } f(x)=0 \iff x=0$$

$$g(x)\leq 0, \ \forall x\in \mathbb{R} \text{ con } g(x)=0 \iff x\in \{a,b\}$$

definimos $h(x)=f(x)+g(x)$, $\forall x\in \mathbb{R}$. Demostrar que: $\exists x_0\in \mathbb{R}^+$ tal que $h(x_0)=-x$.

19. Analizar la continuidad en $\mathbb{R}$ de: $f(x)=\begin{cases} 1-x+[\![x]\!] & , \ x\geq 0 \\ \dfrac{1}{[\![\frac{1}{x}]\!]} & , \ x<0 \end{cases}$

20. Dada la función $f(x)=\sqrt{x-1}$, analizar:

a) La continuidad de f en $[1,10\rangle$.

b) El siguiente límite $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

BIBLIOGRAFÍA

1.- Elon Lages Lima. Análisis Vol. 1
Impa. Libros técnicos y científicos S.A. Br.

2.- Bartle G. Robert INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE. - Editorial Limusa.

3.- Apostol M. Tom ANÁLISIS MATEMÁTICO
Editorial Reverté S.A.

4.- Haaser - La Salle - Sullivan ANÁLISIS MATEMÁTICO 1
Editorial F. Trillas S.A.
México, 1970

5.- Blank A. Albert PROBLEMAS DE CALCULO Y ANÁLISIS MATEMÁTICO
Editorial Limusa - Wiley, S.A.
México, 1971

6.- Demidovich, B.P. PROBLEMAS DE ANALISIS MATEMATICO
Editorial MIR. 1979

7.- Apostol M. Tom CALCULUS. Vol I
Editorial Reverté. 1972

8.- Berman G. N. PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
Editorial MIR. 1977

9.- Spivak Michael CALCULUS. Tomo 1
Editorial Reverté S.A. - 1970
Barcelona.

10.- Lang, S. CALCULO I
Fondo Educativo Interamericano, 1976.